Úloha 1. Korešpondenčný matematický seminár má 100 vedúcich, z ktorých 15 nevie ani po taliansky ani po rusky. Dozvedeli sme sa však, že 65 vie po taliansky a 77 po rusky. Koľko vedúcich sa dorozumie oboma jazykmi, po taliansky aj po rusky?

Riešenie. 57

Úloha 2. Aké najmenšie číslo môže byť dátumom prvej soboty po druhom pondelku nasledujúcom po druhom štvrtku v mesiaci?

Riešenie. 24

Úloha 3. Koľko prirodzených čísel menších ako 200 je nesúdeliteľných aspoň s jedným z čísel 15 alebo 24? *Poznámka:* Dve čísla sú nesúdeliteľné, ak ich najväčší spoločný deliteľ je číslo 1.

Riešenie. 120

Úloha 4. Fofo začal vypisovať všetky 7-ciferné prirodzené čísla, ktoré obsahujú iba nuly a jednotky. Koľko jednotiek počas toho vypisovania napísal?

Riešenie. 256

Úloha 5. Ďurko chcel poslať Jožkovi štvorciferný tajný kód, no v rámci bezpečnosti poslal namiesto toho deväť štvorciferných kódov, pričom každý sa na aspoň jednom mieste zhoduje s tajným kódom. Boli to

$$2186, 4351, 4521, 5127, 5916, 6384, 6924, 8253, 8517.$$

Aký bol Ďurkov tajný kód?

Riešenie. 8326

Úloha 6. Na zvyškový večierok sú pozvané len tie prirodzené čísla n, pre ktoré je zvyšok čísla 2010 po delení n rovný 1. Koľko čísel je pozvaných na večierok?

Riešenie. 5

Úloha 7. Kika chodí rada na ryby a naposledy sa jej obzvlášť darilo. Dve najväčšie ryby tvorili 25% hmotnosti celého úlovku a päť najmenších tvorilo 45% hmotnosti úlovku. Koľko rýb Kika chytila?

Riešenie. 10

Úloha 8. Mišo, Feráč a Kubus oberali jablká. Každý išiel ku jednému stromu, ktoré mali všetky po 100 jabĺk. Keď Kubus dooberal celý strom, Mišo mal v košíku len 72 jabĺk. Kubus sa teda pridal k Mišovi a práve vtedy, keď spolu dooberali Mišov strom, skončil s obernaním aj Feráč. Koľko jabĺk mal naoberaných Feráč v momente, keď Kubus dooberal svoj pôvodný strom? Uvažujte, že každý mal počas celého zberu konštantnú rýchlosť oberania.

Riešenie. 86

Úloha 9. Do kružnice s polomerom R je vpísaný pravouhlý trojuholník s odvesnami dlhými 16 cm a 30 cm. Polomer vpísanej kružnice daného pravouhlého trojuholníka označíme r. Nájdite hodnotu $R + r$.

Riešenie. 23 cm

Úloha 10. Kváder s hranami dĺžok 1, a, $2a$ má povrch 54. Nájdite hodnotu čísla a.

Riešenie. 3

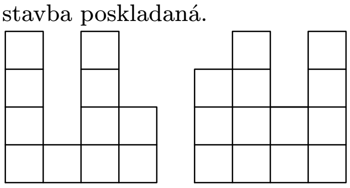
Úloha 11. Vytvorte pomocou práve troch osmičiek a ľubovoľných zo symbolov $+, -, \times, :, \sqrt{\ }$ (plus, mínus, krát, delené, odmocnina) číslo 3. Jeden symbol môžete použiť aj viackrát.

Riešenie. $\sqrt{8 + 8 : 8}$

Úloha 12. Katka mala kopu papierov, na ktorých boli napísané po rade čísla 1, 2, 3, ..., pričom na každom papieri bolo práve jedno číslo. Jefo z Katkinej kopy jeden papier ukradol. Teraz je súčet čísel na Katkiných papieroch 2010. Aké číslo je na ukradnutom liste?

Riešenie. papier s čísom 6

Úloha 13. Beren má stavbu z niekoľkých jednotkových kociek, ktorá sa zmestí do väčšej kocky rozmerov $4 \times 4 \times 4$. Na obrázkoch sú nakreslené pohľady spredu a zboku. Nájdite najmenší aj najväčší počet jednotkových kociek, z ktorých môže byť Berenova stavba poskladaná.



Riešenie. najmenej 14 a najviac 38

Úloha 14. Blcha skáče po mrežových bodoch. Každým jej skokom sa dostane o jeden mrežový bod vyššie, nižšie, doprava alebo doľava. Začne skákať z bodu $(0,0)$. Do koľkých rôznych mrežových bodov sa môže dostať po presne desiatich skokoch? (Napr. po prvom skoku sa blcha určite bude nachádzať na jednom zo štyroch mrežových bodov $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ alebo $(0,-1)$.)
Poznámka: Mrežový bod je taký bod roviny, ktorý má obe súradnice celočíselné.

Riešenie. 121

Úloha 15. Množinu celých čísel nazveme červenou, ak je súčin jej prvkov deliteľný číslom 4. Koľko červených trojprvkových podmnožín má množina $\{1,2,\ldots,20\}$?

Riešenie. 795

Úloha 16. V konečnej aritmetickej postupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_{47}$ je súčet členov s nepárnymi indexami rovný 1272. Nájdite súčet všetkých členov tejto postupnosti.
Poznámka: Postupnosť $a_1, a_2, \ldots, a_{47}$ je aritmetická ak existuje reálne číslo d také, že $a_{m+1} - a_m = d$ pre každé m z množiny $\{1,2,3,\ldots,46\}$. Číslo d nazývame diferencia.

Riešenie. 2491

Úloha 17. V lichobežníku $ABCD$ (so základňami AB a CD) platí $2|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CDA|$. Ďalej vieme, že $|CD| = 3$ cm a $|DA| = 5$ cm. Zistite veľkosť úsečky AB.

Riešenie. 8 cm

Úloha 18. Tri planéty obiehajú hviezdu KMS na sústredných kružnicových dráhach (spoločný stred kružníc je spomínaná hviezda). Hýbu sa konštantnou rýchlosťou, rovnakým smerom, no majú rôzne periódy obehu: 60, 84 a 140 rokov. Raz sa stalo, že tie tri planéty spolu s hviezdou KMS ležali na jedne priamke. O koľko najmenej rokov sa to stane znova?

Riešenie. 105 rokov

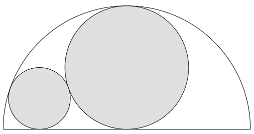
Úloha 19. Filip sa raz ocitol v jednej zapadnutej rovine. Nachádzal sa v bode so súradnicami $[-30, 11]$ a vybral sa po priamke až do bodu $[9, -40]$. Koľko mrežových bodov cestou navštívil? Zarátajte aj začiatočný a koncový bod.

Riešenie. 4

Úloha 20. Stanka má svoje obľúbené prirodzené číslo. Vieme, že je to najmenšie prirodzené číslo m také, že čísla m, $m+1$ majú obe ciferný súčet deliteľný číslom 14. Nájdite Stankine obľúbené číslo.

Riešenie. 5 899 999 999 999

Úloha 21. Kenny si nakreslil polkruh s polomerom 1 a vpísal do neho dva kruhy, ktoré sa zvonka dotýkajú. (Jeho náčrtok je na obrázku.) Oba tieto kruhy majú dva dotyky s polkruhom a jeden z týchto kruhov má polomer 1/2. Ivku ale zaujímal polomer druhého kruhu. Vedeli by ste jej pomôcť a zistiť jeho veľkosť?



Riešenie. 1/4

Úloha 22. Koľkými spôsobmi môžeme z dvanástich rôznych hráčov zostaviť tri tímy po štyroch hráčoch?

Riešenie. $\binom{12}{4}\binom{8}{4}/3! = 5775$

Úloha 23. Vyčíslite výraz $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \cdots + 2009^2 - 2010^2$.
Poznámka: Znamienka vo výraze sa striedajú.

Riešenie. $-\frac{2010\cdot 2011}{2} = -2021055$

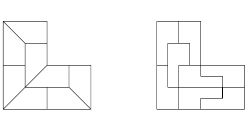
Úloha 24. Kajine auto ide z kopca rýchlosťou 72 km/h, po rovine rýchlosťou 63 km/h a hore kopcom rýchlosťou 56 km/h. Cesta z Horných Fafákov do Dolných Fafákov trvá Kajinmu autu 4 hodiny. Spiatočná cesta mu trvá 4 hodiny a 40 minút. Aká je vzdialenosť po ceste medzi Hornými a Dolnými Fafákmi?

Riešenie. 273 km

Úloha 25. Na Matfyze máme taký divný bankomat. Keď k nemu naposledy Bus prišiel, bola v ňom hotovosť 500 eur v jednoeurovkách a nič iné. Z bankomatu sa dá buď vybrať hotovosť presne 300 eur alebo vložiť hotovosť presne 198 eur. Akú najväčšiu hotovosť si mohol Bus vybrať, ak na začiatku nemal pri sebe ani euro? (Mohol vkladať a vyberať hotovosť hocikoľkokrát a v akomkoľvek poradí.)

Riešenie. 498 eur

Úloha 26. Zlepíme tri rovnako veľké štvorce do tvaru „L“ ako na obrázku. Rozdeľte tento útvar na osem geometricky zhodných útvarov.

Riešenie. Napríklad 

Úloha 27. Kým Petržlen spal, niekto sa mu vlámal do izby a z jeho šachovnice rozmerov 8×8 vyrezal pravé horné a ľavé dolné rohové políčko. Petržlen bol samozrejme veľmi nešťastný a rozveselil ho vytrhol až Edo. Toho totiž zaujímalo, koľkými spôsobmi môžeme na takúto upravenú šachovnicu postaviť osem veží tak, aby sa navzájom neohrozovali. (Veža ohrozuje všetky políčka, ktoré sú v rovnakom riadku alebo rovnakom stĺpci ako daná veža.) Tak sa obaja spoločne pustili do rozmýšľania a nakoniec dospeli k správnemu výsledku. Koľko to bolo?

Riešenie. $8! - 2 \cdot 7! + 6! = 43 \cdot 6! = 30960 = 5040 + 25920$

Úloha 28. Kvadratická rovnica $x^2 - mx + 2 = 0$ s parametrom m má korene a, b. Nech

$$a + \frac{1}{b}, \quad b + \frac{1}{a}$$

sú korene kvadratickej rovnice $x^2 - px + q = 0$. Určte hodnotu q (v závislosti od m).

Riešenie. $q = 9/2$ ($p = 3m/2$, ale to nemusia odovzdávať)

Úloha 29. Majme štyri kladné, nie nutne celé čísla a, b, c a d. Existuje šesť možností, ako vynásobiť práve dve z nich, konkrétne ab, ac, ad, bc, bd a cd. Vieme, že niektorých päť z týchto súčinov má hodnoty 2, 3, 4, 5 a 6. Akú hodnotu má šiesty súčin?

Riešenie. $12/5$

Úloha 30. Máme 12 mačiatok, z toho 8 čiernych a 4 biele. Postupne z nich náhodne vyberieme 6 mačiatok. Aká je pravdepodobnosť, že posledné bude čierne?

Riešenie. $2/3$

Úloha 31. Aký zvyšok dostaneme, ak vydelíme číslo $1^1 + 2^2 + \cdots + 2010^{2010}$ číslom 12?

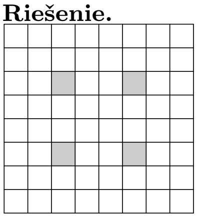
Riešenie. 1

Úloha 32. Bzdušo má drevenú dosku v tvare rovnoramenného trojuholníka so stranami dĺžok 1, 1 a $\sqrt{2}$. Chce ju rozrezať na dva kusy s rovnakým obsahom. Nájdite najkratšiu úsečku, po ktorej môže Bzdušo rezať a určte jej dĺžku.

Riešenie. $\sqrt{\sqrt{2} - 1}$

Úloha 33. Ktoré políčka môžeme vystrihnúť zo šachovnice 8×8 tak, aby sa zvyšok dal pokryť 21 dominami tvaru 3×1?

Riešenie.



Úloha 34. Hanka s Kubom sa hrajú nasledovnú hru. Majú kôpku s n zápalkami a striedajú sa v ťahoch. Každý musí vo svojom ťahu zobrať z kopy kladný počet zápaliek neprevyšujúci polovicu zápaliek z kopy. Ten, kto bude mať na začiatku svojho ťahu len jednu zápalku, (a teda nemôže spraviť další ťah) vyhrá. Ak viete, že prvý ťah má Hanka, nájdite n najbližšie číslu 2010 také, že Kubo môže vyhrať (bez ohľadu na to, ako dobre hrá Hanka).

Riešenie. 1535

Úloha 35. Trojuholník ABC má pravý uhol pri vrchole A. Na strane AB sa nachádza bod D, pričom $|CD| = 1$. Označme AE výšku z bodu A na stranu BC. Nájdite dĺžku AD, ak ešte viete, že $|BD| = |BE| = 1$.

Riešenie. $\sqrt[3]{2} - 1$

Úloha 36. Množina X má n prvkov. Nech A, B sú dve náhodné podmnožiny X. Aká je pravdepodobnosť, že A je podmnožina B?

Poznámka: Pre každú množinu C takú, že C je podmnožina X, je pravdepodobnosť výberu množiny C rovná $1/2^n$. Výbery podmnožín A a B v zadaní sú navzájom nezávislé.

Riešenie. $(3/4)^n$

Úloha 37. Nájdite najväčšie prirodzené číslo m také, že rovnica $2009x + 2011y = m$ má práve jedno riešenie v prirodzených číslach.

Riešenie. $2 \cdot 2009 \cdot 2011 = 8\,080\,198$

Úloha 38. Nájdite aspoň jedno reálne číslo x, pre ktoré platí

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}} = x.$$

Riešenie. $(1 + \sqrt{5})/2$, teda zlatý rez.

Úloha 39. Nájdi všetky dvojice prirodzených čísel, ktorých rozdiel je prvočíslo, ich súčin je druhá mocnina prirodzeného čísla a ich súčet má cifru na mieste jednotiek (v desiatkovej sústave) rovnú trom.

Riešenie. $9, 4$.

Úloha 40. Na šachovnici $n \times n$ je rozmiestnených 1005 dominových kociek tak, že každá z nich zakrýva dve políčka šachovnice susediace stranou. Žiadne dve dominové kocky sa neprekrývajú ani nedotýkajú (a to ani len rohom), takže pokrývajú plochu veľkosti 2010. Nájdite najmenšie n, pre ktoré existuje šachovnica s danými vlastnosťami.

Riešenie. 77

Úloha 41. Nech $n = p_1p_2 \cdots p_k$ je rozklad prirodzeného čísla n na prvočísla, nie nutne rôzne. Číslo n nazveme zelené, ak platí, že n delí $(p_1 + 1)(p_2 + 1) \cdots (p_k + 1)$. Existujú zelené čísla väčšie ako 100? Nájdi najmenšie z nich.

Riešenie. 144 (zelené čísla sú tvaru $2^m 3^n$, kde $n \leq m \leq 2n$)

Úloha 42. Funkcia f priradí každej dvojici prirodzených čísel (m, n) celé číslo $f(m, n)$. Vieme, že pre všetky m, n prirodzené platí

$$f(1, 1) = 1, \quad f(m + 1, n) = f(m, n) + m, \quad f(m, n + 1) = f(m, n) - n.$$

Nájdite všetky prirodzené čísla p, pre ktoré existuje také prirodzené číslo q, že platí $f(p, q) = 2010$.

Riešenie. 2010, 1006, 291, 151, 70, 66

Úloha 43. Na univerzite je s študentov. Vie sa, že každý učiteľ učí práve k študentov a pre každú dvojicu (rôznych) študentov existuje práve m učiteľov, ktorí učia oboch študentov. Pomocou konštánt s, k, m vyjadrite počet učiteľov, ktorí učia na univerzite.

Riešenie. $ms(s - 1)/(k(k - 1))$

Úloha 44. V rovine je nakreslených 9 rôznych priamok. Ak sa pretnú práve 2 priamky v jednom bode, voláme tento priesečník modrý, ak práve tri, voláme ho červený. Našich 9 priamok vieme rozdeliť na tri trojice. Každá priamka z prvej trojice obsahuje 3 červené a 1 modrý bod, priamky z druhej trojice majú 2 červené a 4 modré body a každá priamka z tretej trojice má 2 červené a 3 modré body. Určte, na koľko častí delí týchto 9 priamok rovinu.

Riešenie. 10+počet modrých priesečníkov +2$\cdot$ počet červených priesečníkov $= 10 + 12 + 2 \cdot 7 = 36$.

Úloha 45. Nájdite najmenšie reálne číslo k také, že pre všetky reálne čísla x, y platí $2x + 3y \leq k\sqrt{x^2 + y^2}$.

Riešenie. $\sqrt{13}$

Úloha 46. Nech x, y sú kladné celé čísla spĺňajúce $xy = 2010(x + y)$. Aká je najväčšia možná hodnota x?

Riešenie. $2010 \cdot 2011 = 4042110$

Úloha 47. Škrečok by chcel nakresliť tabuľku veľkosti 25×25 zloženú zo 625 malých štvorčekov. Škrečok vie kresliť len štvorce (presnejšie, ich obvody) ľubovoľnej veľkosti. Pri kreslení vždy nakreslí celý štvorec a nemôže používať gumu. Koľko najmenej štvorcov musí Škrečok nakresliť, aby nakreslil celú tabuľku a nič naviac?

Riešenie. 48

Úloha 48. Každé políčko šachovnice 8×8 môžeme ofarbiť na bielo alebo na čierno. Nájdite počet rôznych ofarbení šachovnice, pre ktoré každý štvorec 2×2 obsahuje dve biele a dve čierne políčka.
Poznámka: Na orientácii šachovnice záleží. Dve ofarbenia, ktoré nie sú totožné, ale po otočení a (alebo) preklopení jedného z nich už totožné sú, nepovažujeme za rovnaké.

Riešenie. 510

Úloha 49. Kubická rovnica $x^3 + 2x - 1 = 0$ má práve jeden reálny koreň r. Vieme, že $0.4 < r < 0.5$. Nájdite všetky rastúce postupnosti prirodzených čísel $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ také, že platí

$$\frac{1}{2} = r^{a_1} + r^{a_2} + r^{a_3} + \cdots$$

Riešenie. Existuje len jediná: $\{1, 4, 7, 10 \ldots\}$.

Úloha 50. Konvexný šesťuholník so stranami dĺžok 2, 2, 7, 7, 11 a 11 je vpísaný do kružnice. Nájdite jej polomer.

Riešenie. 7

Úloha 51. V krabici je niekoľko farebných loptičiek, pričom z každej farby je ich rovnako veľa. Ak by sme do krabice pridali 20 loptičiek, ktoré majú rovnakú farbu, ale inú od všetkých, ktoré predtým boli v krabici, nezmeníme tým pravdepodobnosť, že pri ťahaní dvoch loptičiek bez vracania, vytiahneme loptičky rovnakej farby. Koľko bolo na začiatku loptičiek v krabici?

Riešenie. 190