

Úloha 1. Kváder s hranami dĺžok 1 , a , $2a$ má povrch 54 . Nájdite hodnotu čísla a .

1

Úloha 2. Vytvorte pomocou práve troch osmičiek a ľubovoľných zo symbolov $+$, $-$, \times , $:$, $\sqrt{\quad}$ (plus, mínus, krát, delené, odmocnina) číslo 3 . Jeden symbol môžete použiť aj viackrát.

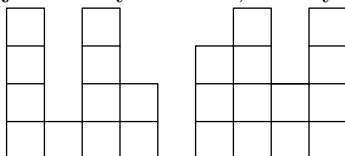
1

Úloha 3. Katka mala kopy papierov, na ktorých boli napísané po rade čísla $1, 2, 3, \dots$, pričom na každom papieri bolo práve jedno číslo. Jeľo z Katkinej kopy jeden papier ukradol. Teraz je súčet čísel na Katkiných papieroch 2010 . Aké číslo je na ukradnutom liste?

1

Úloha 4. Beren má stavbu z niekoľkých jednotkových kociek, ktorá sa zmestí do väčšej kocky rozmerov $4 \times 4 \times 4$. Na obrázkoch sú nakreslené pohľady spredu a zľoku. Nájdite najmenší aj najväčší počet jednotkových kociek, z ktorých môže byť Berenova stavba poskladaná.

1



Úloha 5. Blcha skáče po mrežových bodoch. Každým jej skokom sa dostane o jeden mrežový bod vyššie, nižšie, doprava alebo doľava. Začne skákať z bodu $(0, 0)$. Do koľkých rôznych mrežových bodov sa môže dostať po presne desiatich skokoch? (Např. po prvom skoku sa blcha určite bude nachádzať na jednom zo štyroch mrežových bodov $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ alebo $(0, -1)$.)

1

Poznámka: Mrežový bod je taký bod roviny, ktorý má obe súradnice celočíselné.

Úloha 6. Množinu celých čísel nazveme červenou, ak je súčin jej prvkov deliteľný číslom 4 . Koľko červených trojprvkových podmnožín má množina $\{1, 2, \dots, 20\}$?

1

Úloha 7. V konečnej aritmetickej postupnosti a_1, a_2, \dots, a_{47} je súčet členov s nepárnymi indexami rovný 1272 . Nájdite súčet všetkých členov tejto postupnosti.

1

Poznámka: Postupnosť a_1, a_2, \dots, a_{47} je aritmetická ak existuje reálne číslo d také, že $a_{m+1} - a_m = d$ pre každé m z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 46\}$. Číslo d nazývame diferenciu.

Úloha 8. V lichobežníku $ABCD$ (so základňami AB a CD) platí $2|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CDA|$. Ďalej vieme, že $|CD| = 3$ cm a $|DA| = 5$ cm. Zistite veľkosť úsečky AB .

1

Úloha 9. Tri planéty obieľajú hviezdu KMS na sústredných kružnicových dráhach (spoločný stred kružníc je spomínaná hviezda). Hýľbu sa konštantnou rýchlosťou, rovnakým smerom, no majú rôzne periódy obeľu: 60 , 84 a 140 rokov. Raz sa stalo, že tie tri planéty spolu s hviezdou KMS ležali na jedne priamke. O koľko najmenej rokov sa to stane znova?

1

Úloha 10. Filip sa raz ocitol v jednej zapadnutej rovine. Nachádzal sa v bode so súradnicami $[-30, 11]$ a vybral sa po priamke až do bodu $[9, -40]$. Koľko mrežových bodov cestou navštívil? Zarátajte aj začiatkový a koncový bod.

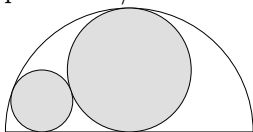
1

Poznámka: Mrežový bod je taký bod roviny, ktorý má obe súradnice celočíselné.

1

Úloha 11. Stanka má svoje obľúbené prirodzené číslo. Vieme, že je to najmenšie prirodzené číslo m také, že čísla m , $m + 1$ majú obe ciferný súčet deliteľný číslom 14. Nájdite Stankine obľúbené číslo.

Úloha 12. Kenny si nakreslil polkruh s polomerom 1 a vpísal do neho dva kruhy, ktoré sa zvonka dotýkajú. (Jeho náčrtok je na obrázku.) Oba tieto kruhy majú dva dotyky s polkruhom a jeden z týchto kruhov má polomer $1/2$. Ivku ale zaujímal polomer druhého kruhu. Vedeli by ste jej pomôcť a zistiť jeho veľkosť?



Úloha 13. Kolkými spôsobmi môžeme z dvanástich rôznych hráčov zostaviť tri tímy po štyroch hráčoch?

Úloha 14. Vyčísľte výraz $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \dots + 2009^2 - 2010^2$.

Poznámka: Znamienka vo výraze sa striedajú.

Úloha 15. Kajine auto ide z kopca rýchlosťou 72 km/h, po rovine rýchlosťou 63 km/h a hore kopcom rýchlosťou 56 km/h. Cesta z Horných Fafákov do Dolných Fafákov trvá Kajinmu autu 4 hodiny. Spiatočná cesta mu trvá 4 hodiny a 40 minút. Aká je vzdialenosť po ceste medzi Hornými a Dolnými Fafákmi?

Úloha 16. Na Matfyzе máme taký divný bankomat. Keď k nemu naposledy Bus prišiel, bola v ňom hotovosť 500 eur v jednoeurovkách a nič iné. Z bankomatu sa dá buď vybrať hotovosť presne 300 eur alebo vložiť hotovosť presne 198 eur. Akú najväčšiu hotovosť si mohol Bus vybrať, ak na začiatku nemal pri sebe ani euro? (Mohol vkladať a vyberať hotovosť hocikolkokrát a v akomkoľvek poradí.)

Úloha 17. Zlepíme tri rovnako veľké štvorce do tvaru „L“ ako na obrázku. Rozdeľte tento útvar na osem geometricky zhodných útvarov.



Úloha 18. Kým Petržlen spal, niekto sa mu vlámal do izby a z jeho šachovnice rozmerov 8×8 vyrezal pravé horné a ľavé dolné rohové políčko. Petržlen bol samozrejme veľmi nešťastný a rozveselil ho vytrhol až Edo. Toho totiž zaujímal, kolkými spôsobmi môžeme na takúto upravenú šachovnicu postaviť osem veží tak, aby sa navzájom neohrozovali. (Veža ohrozuje všetky políčka, ktoré sú v rovnakom riadku alebo rovnakom stĺpci ako daná veža.) Tak sa obaja spoločne pustili do rozmýšľania a nakoniec dospeli k správnejmu výsledku. Koľko to bolo?

Úloha 19. Kvadratická rovnica $x^2 - mx + 2 = 0$ s parametrom m má korene a , b . Nech

$$a + \frac{1}{b}, \quad b + \frac{1}{a}$$

sú korene kvadratickej rovnice $x^2 - px + q = 0$. Určte hodnotu q (v závislosti od m).

Úloha 20. Majme štyri kladné, nie nutne celé čísla a , b , c a d . Existuje šesť možností, ako vynásobiť práve dve z nich, konkrétne ab , ac , ad , bc , bd a cd . Vieme, že niektorých päť z týchto súčinov má hodnoty 2, 3, 4, 5 a 6. Akú hodnotu má šiesty súčin?

Úloha 21. Máme 12 mačiatok, z toho 8 čiernych a 4 biele. Postupne z nich náhodne vyberieme 6 mačiatok. Aká je pravdepodobnosť, že posledné bude čierne? 1

Úloha 22. Aký zvyšok dostaneme, ak vydělíme číslo $1^1 + 2^2 + \dots + 2010^{2010}$ číslom 12? 1

Úloha 23. Bzdušo má drevenú dosku v tvare rovnoramenného trojuholníka so stranami dĺžok 1, 1 a $\sqrt{2}$. Chce ju rozrezať na dva kusy s rovnakým obsahom. Nájdite najkratšiu úsečku, po ktorej môže Bzdušo rezať a určte jej dĺžku. 1

Úloha 24. Ktoré políčka môžeme vystrihnúť zo šachovnice 8×8 tak, aby sa zvyšok dal pokryť 21 dominami tvaru 3×1 ? 1

Úloha 25. Hanka s Kubom sa hrajú nasledovnú hru. Majú kôpku s n zápalkami a striedajú sa v ťahoch. Každý musí vo svojom ťahu zobrať z kopy kladný počet zápalek neprevyšujúci polovicu zápalek z kopy. Ten, kto bude mať na začiatku svojho ťahu len jednu zápalku, (a teda nemôže spraviť ďalší ťah) vyhrá. Ak viete, že prvý ťah má Hanka, nájdite n najbližšie číslu 2010 také, že Kubo môže vyhrať (bez ohľadu na to, ako dobre hrá Hanka). 1

Úloha 26. Trojuholník ABC má pravý uhol pri vrchole A . Na strane AB sa nachádza bod D , pričom $|CD| = 1$. Označme AE výšku z bodu A na stranu BC . Nájdite dĺžku AD , ak ešte viete, že $|BD| = |BE| = 1$. 1

Úloha 27. Množina X má n prvkov. Nech A, B sú dve náhodné podmnožiny X . Aká je pravdepodobnosť, že A je podmnožina B ? 1
Poznámka: Pre každú množinu C takú, že C je podmnožina X , je pravdepodobnosť výberu množiny C rovná $1/2^n$. Výbery podmnožín A a B v zadaní sú navzájom nezávislé.

Úloha 28. Nájdite najväčšie prirodzené číslo m také, že rovnica $2009x + 2011y = m$ má práve jedno riešenie v prirodzených číslach. 1

Úloha 29. Nájdite aspoň jedno reálne číslo x , pre ktoré platí 1

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}} = x.$$

Úloha 30. Nájdí všetky dvojice prirodzených čísel, ktorých rozdiel je prvočíslo, ich súčin je druhá mocnina prirodzeného čísla a ich súčet má cifru na mieste jednotiek (v desiatkovej sústave) rovnú trom. 1

Úloha 31. Na šachovnici $n \times n$ je rozmiestnených 1005 dominových kociek tak, že každá z nich zakrýva dve políčka šachovnice susediace stranou. Žiadne dve dominové kocky sa neprekrývajú ani nedotýkajú (a to ani len rohom), takže pokrývajú plochu veľkosti 2010. Nájdite najmenšie n , pre ktoré existuje šachovnica s danými vlastnosťami. 1

1

Úloha 32. Nech $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ je rozklad prirodzeného čísla n na prvočísla, nie nutne rôzne. Číslo n nazveme zelené, ak platí, že n delí $(p_1 + 1)(p_2 + 1) \cdots (p_k + 1)$. Existujú zelené čísla väčšie ako 100? Nájdi najmenšie z nich.

Úloha 33. Funkcia f priradí každej dvojici prirodzených čísel (m, n) celé číslo $f(m, n)$. Vieme, že pre všetky m, n prirodzené platí

$$f(1, 1) = 1, \quad f(m + 1, n) = f(m, n) + m, \quad f(m, n + 1) = f(m, n) - n.$$

Nájdi všetky prirodzené čísla p , pre ktoré existuje také prirodzené číslo q , že platí $f(p, q) = 2010$.

Úloha 34. Na univerzite je s študentov. Vie sa, že každý učiteľ učí práve k študentov a pre každú dvojicu (rôznych) študentov existuje práve m učiteľov, ktorí učia oboch študentov. Pomocou konštánt s, k, m vyjadrite počet učiteľov, ktorí učia na univerzite.

Úloha 35. V rovine je nakreslených 9 rôznych priamok. Ak sa pretnú práve 2 priamky v jednom bode, voláme tento priesečník modrý, ak práve tri, voláme ho červený. Našich 9 priamok vieme rozdeliť na tri trojice. Každá priamka z prvej trojice obsahuje 3 červené a 1 modrý bod, priamky z druhej trojice majú 2 červené a 4 modré body a každá priamka z tretej trojice má 2 červené a 3 modré body. Určte, na koľko častí delí týchto 9 priamok rovinu.

Úloha 36. Nájdi najmenšie reálne číslo k také, že pre všetky reálne čísla x, y platí $2x + 3y \leq k\sqrt{x^2 + y^2}$.

Úloha 37. Nech x, y sú kladné celé čísla spĺňajúce $xy = 2010(x + y)$. Aká je najväčšia možná hodnota x ?

Úloha 38. Škrečok by chcel nakresliť tabuľku veľkosti 25×25 zloženú zo 625 malých štvorcíkov. Škrečok vie kresliť len štvorce (presnejšie, ich obvody) ľubovoľnej veľkosti. Pri kreslení vždy nakreslí celý štvorec a nemôže používať gumu. Koľko najmenej štvorcíkov musí Škrečok nakresliť, aby nakreslil celú tabuľku a nič navyše?

Úloha 39. Každé políčko šachovnice 8×8 môžeme ofarbiť na bielo alebo na čierne. Nájdi počet rôznych ofarbení šachovnice, pre ktoré každý štvorec 2×2 obsahuje dve biele a dve čierne políčka.
Poznámka: Na orientácii šachovnice záleží. Dve ofarbenia, ktoré nie sú totožné, ale po otočení a (alebo) preklopení jedného z nich už totožné sú, nepovažujeme za rovnaké.

Úloha 40. Kubická rovnica $x^3 + 2x - 1 = 0$ má práve jeden reálny koreň r . Vieme, že $0.4 < r < 0.5$. Nájdi všetky rastúce postupnosti prirodzených čísel $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ také, že platí

$$\frac{1}{2} = r^{a_1} + r^{a_2} + r^{a_3} + \cdots$$

Úloha 41. Konvexný šesťuholník so stranami dĺžok 2, 2, 7, 7, 11 a 11 je vpísaný do kružnice. Nájdi jej polomer.

Úloha 42. V krabici je niekoľko farebných loptičiek, pričom z každej farby je ich rovnako veľa. Ak by sme do krabice pridali 20 loptičiek, ktoré majú rovnakú farbu, ale inú od všetkých, ktoré predtým boli v krabici, nezmeníme tým pravdepodobnosť, že pri ťahaní dvoch loptičiek bez vracania, vytiahneme loptičky rovnakej farby. Koľko bolo na začiatku loptičiek v krabici?