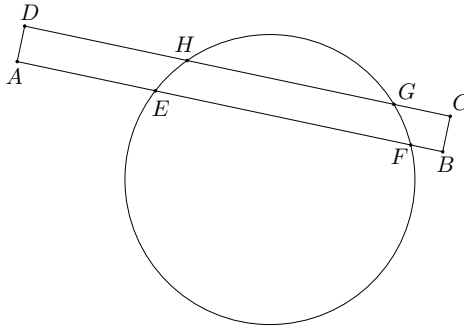


**Úloha 1 J.** Čitateľ aj menovateľ Jefovho zlomku sú prirodzené čísla so súčtom 2011. Hodnota zlomku je pritom menšia ako  $1/3$ . Aká najväčšia môže byť hodnota Jefovho zlomku?

*Výsledok.*  $\frac{502}{1509}$ .

**Úloha 2 J.** Na obrázku pretína obdĺžnik  $ABCD$  kružnicu v bodoch  $E, F, G, H$ . Vieme, že  $|AE| = 3$ ,  $|DH| = 4$  a  $|GH| = 5$ . Vypočítajte dĺžku úsečky  $EF$ .



*Výsledok.* 7.

**Úloha 3 J.** Vypočítajte ciferný súčet čísla  $1 + 11 + 101 + 1001 + 10001 + \dots + \underbrace{10 \dots 01}_{50}$ .

*Výsledok.* 58.

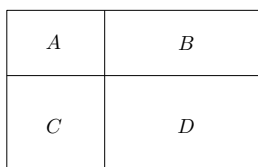
**Úloha 4 J.** Niekoľko mandarínok sme rozdělili do troch sáčkov. V prvom sáčku je o šesť mandarínok menej ako v zvyšných dvoch sáčkoch dohromady. Podobne, v druhom sáčku je o 10 mandarínok menej ako v zvyšných dvoch sáčkoch dohromady. Koľko mandarínok je v treťom sáčku?

*Výsledok.* 8.

**Úloha 5 J.** Na stole je 33 orechov rozdelených aspoň na dve kôpky. V každej kôpke sú aspoň dva orechy. Ak zo všetkých kôpok zoberieme jeden orech a položíme ho na prvú kôpku, tak bude na všetkých kôpkach rovnako veľa orechov. Koľko kôpok mohlo byť pôvodne na stole? Zistite všetky možnosti.

*Výsledok.* 3.

**Úloha 6 J.** Obdĺžnik je dvoma úsečkami rovnobežnými s jeho stranami rozdelený na štyri menšie obdĺžniky. Označme ich  $A, B, C, D$  rovnako ako na obrázku. Obvody obdĺžnikov  $A, B$  a  $C$  sú po rade 2 cm, 4 cm a 7 cm. Aké hodnoty môže nadobúdať obvod obdĺžnika  $D$ ?



*Výsledok.* 9 cm.

**Úloha 7 J.** Nájdite rozdielne cifry  $A$ ,  $B$  a  $C$  (v desiatkovej sústave) také, aby platil nasledujúci sčítací vzťah:

$$\begin{array}{r} A \\ AB \\ \underline{ABC} \\ BCB \end{array}$$

*Výsledok.*  $A = 6$ ,  $B = 7$ ,  $C = 4$ .

**Úloha 8 J.** Určte obsah obdĺžnika, ak viete, že jeho obvod je 10 cm a jeho uhlopriečka má dĺžku  $\sqrt{15}$  cm.

*Výsledok.*  $5 \text{ cm}^2$ .

**Úloha 9 J.** Edo si zobral  $N^3$  rovnako veľkých kociek a postavil z nich jednu veľkú kocku o rozmeroch  $N \times N \times N$ . Celý povrch veľkej kocky zafarbil a potom ju celú rozložil na pôvodné kocky. Určte  $N$ , ak viete, že je zafarbená desatina celkového povrchu malých kociek.

*Výsledok.* 10.

**Úloha 10 J.** Koľko najmenej členov má matematický klub, v ktorom je zastúpenie žien väčšie ako 48,5%, ale menšie ako 50%?

*Výsledok.* 35.

**Úloha 11 J / 1 S.** Ak zväčšíte číslo úlohy, ktorú práve držíte v ruke o číslo  $n$ , získate číslo úlohy s najviac šokujúcim zadaním. Ak ho ale zväčšíte o dvojciferné číslo  $k$ , získate číslo najhravejšej úlohy. Navyiac platí, že  $n^3 = k^2$ . Určte  $n$  a  $k$ , ak viete, že vám zostáva ešte 44 úloh (vrátane tejto).

*Výsledok.*  $n = 9$ ,  $k = 27$ .

**Úloha 12 J / 2 S.** Nájdite prirodzené číslo  $n$  spĺňajúce vzťah  $6666^2 + 8888^2 = n^2$ .

*Výsledok.* 11110.

**Úloha 13 J / 3 S.** Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktorého desiatkový zápis končí na 17, je deliteľné 17-timi a má ciferný súčet 17.

*Výsledok.* 15317.

**Úloha 14 J / 4 S.** Každá dvojica po sebe idúcich cifier istého 2011-ciferného čísla je násobkom 17 alebo 23. Jeho posledná cifra je 1. Určte jeho prvú cifru.

*Výsledok.* 3.

**Úloha 15 J / 5 S.** Prirodzené číslo nazveme *luxusné*, ak každé iné číslo s rovnakým ciferným súčtom je od neho väčšie. Zistite, koľko je trojciferných luxusných čísel.

*Výsledok.* 9.

**Úloha 16 J / 6 S.** Škrečkove reálne čísla  $x$ ,  $y$ ,  $z$  spĺňajú  $(x - y)/(z - y) = -10$ . Aké hodnoty môže nadobúdať výraz  $(x - z)/(y - z)$ ? Nájdite všetky možnosti.

*Výsledok.* 11.

**Úloha 17 J / 7 S.** Čísllice 1, 2, ..., 9 napíšeme za sebou v nejakom poradí tak, aby vzniklo deväťciferné číslo. Uvažujme všetky trojice po sebe idúcich cifier tohto čísla a k týmto trojiciam zodpovedajúce trojiciferné čísla sčítame. Aký najväčší výsledok môžeme dostať?

*Výsledok.* 4648.

**Úloha 18 J / 8 S.** V každom poličku tabuľky  $10 \times 10$  je napísané číslo. Filip si vybral dve čísla z tabuľky a do zošita si napísal ich súčin. Toto spravil pre všetky dvojice čísel z tabuľky. Všimol si, že práve 1000 z týchto súčinov je záporných. Koľko z pôvodných čísel mohlo byť rovných nule? Vypíšte všetky možnosti.

*Výsledok.* 30, 35.

**Úloha 19 J / 9 S.** V istom kráľovstve začali raziť mince. Počas prvého dňa razili mince v hodnote 1 fufeň. Každý ďalší deň razili mince v najmenšej hodnote, ktorá sa nedala zaplatiť pomocou maximálne desiatich už vyrazených mincí. Mince akej hodnoty razili počas 2011-teho dňa?

*Výsledok.* 20101 (fufníkú).

**Úloha 20 J / 10 S.** Označme  $p$  riešenie úlohy na tomto papieri. Určte pravdepodobnosť (číslo z intervalu  $(0, 1)$ ), že náhodne vybraný bod vnútri štvorca so stranou 1 cm je od všetkých jeho strán vzdialený aspoň  $p$  cm.

*Výsledok.*  $\frac{1}{4}$ .

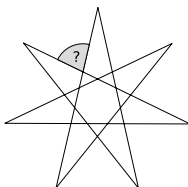
**Úloha 21 J / 11 S.** Tabuľka  $3 \times 3$  je vyplnená celými číslami. Súčty čísel v riadkoch zhora nadol stúpajú o 2 a súčty čísel v stĺpoch zľava doprava sa zdvojnásobujú. Ak je súčet jedného z riadkov 2011, tak aký je súčet čísel v ľavom stĺpci?

*Výsledok.* 861.

**Úloha 22 J / 12 S.** Dva trajekty vyplávali naraz proti sebe cez zátoku. Oba plávali po priamke konštantnou, ale rozdielnou rýchlosťou. Prvýkrát sa stretli vo vzdialenosti 100 m od jedného brehu. Keď každý z nich doplával k protifahlému brehu, ihneď sa otočil a plával rovnakou cestou naspäť. Na spätočnej ceste sa stretli trajekty vo vzdialenosti 70 m od druhého brehu. Aká široká je zátoka?

*Výsledok.* 230 m.

**Úloha 23 J / 13 S.** Vrcholy hviezdy na obrázku tvoria pravidelný sedemuholník. Aká je veľkosť vyznačeného uhla?



*Výsledok.*  $\frac{3\pi}{7} = \frac{540^\circ}{7} = 77^\circ + \frac{1^\circ}{7}$ .

**Úloha 24 J / 14 S.** Nájdite  $x$  spĺňajúce vzťah  $2^{2^{3^{2^2}}} = 4^{4^x}$ .

Poznámka: poschodové mocniny sa vyhodnocujú zhora, tj.  $4^{3^2} = 4^9$ .

*Výsledok.* 40.

**Úloha 25 J / 15 S.** Zistite počet usporiadaných trojíc prirodzených čísel  $(a, b, c)$  takých, že  $a + b + c \leq 30$  a

$$\frac{\frac{a}{c} + \frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + \frac{b}{c} + 1} = 11$$

*Výsledok.* 24.

**Úloha 26 J / 16 S.** V rovine je daná kružnica s polomerom 1, stredom  $O$  a priemerom  $AC$ . Označme  $p$  kolmicu na priemer  $AC$  prechádzajúcu bodom  $O$ . Zvolíme bod  $U$  na priamke  $p$  mimo kružnice taký, že ak označíme druhý priesečník kružnice s priamkou  $AU$  ako  $B$ , tak platí  $|BU| = 1$ . Určte dĺžku úsečky  $OU$ .

*Výsledok.*  $\sqrt{3}$ .

**Úloha 27 J / 17 S.** Bitky dvoch armád  $A$  a  $B$  sa zúčastnilo dokopy 1000 vojakov. Armády strelali v salvách. V každej salve zastrelil každý vojak jedného vojaka z nepriateľskej armády (ak je to možné, tak každý iného). V tejto bitke strelala najprv armáda  $A$ , potom armáda  $B$  a nakoniec armáda  $A$ . Najmenej koľko vojakov bitku určite prežilo?

*Výsledok.* 200.

**Úloha 28 J / 18 S.** Všetkých šesť strán konvexného šesťuholníka  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  je zafarbených na červeno. Každú z uhlopriečok zafarbíme buď na červeno, alebo na modro. Koľko je zafarbených takých, že každý trojuholník  $A_iA_jA_k$  ( $i \neq j \neq k \neq i$ ) má aspoň jednu zo svojich strán zafarbenú na červeno?

*Výsledok.*  $392 = 7 \cdot 7 \cdot 8$ .

**Úloha 29 J / 19 S.** Petržlen najskôr povedal jedno prirodzené číslo Škrečkovi a jedno prirodzené číslo Jefovi. Potom im povedal, že ich čísla sú rôzne a súčet ich čísel je dvojciferné číslo. Následne sa začali Škrečok s Jefom rozprávať:

Škrečok: „Neviem povedať, kto z nás má väčšie číslo.“

Jefo: „Ani ja, ale prezradím, že moje číslo je deliteľné 17–mi.“

Škrečok: „Aha!, tak ja už teraz viem aký je súčet našich čísel.“

Čomu sa rovná tento súčet, ak obaja uvažovali bezchybne?

*Výsledok.* 51.

**Úloha 30 J / 20 S.** V kaviarni sú Indovia a Turci a dohromady je ich 55. Každý z nich pije buď kávu alebo čaj. Ind je pravdovravný práve vtedy, keď pije čaj. Turek je pravdovravný práve vtedy, keď pije kávu. Na otázky: „Pijete kávu?“ a „Ste Turek?“ a „Prší vonku?“ boli počty kladných odpovedí postupne 44, 33 a 22 (každý odpovedal práve raz). Koľko Indov pije čaj? Nájdite všetky možnosti.

*Výsledok.* 0.

**Úloha 31 J / 21 S.** Za pravý koniec prirodzeného čísla  $A$  v desiatkovom zápise boli dopísané tri cifry, čím vzniklo číslo, ktoré je súčtom všetkých prirodzených čísel od 1 po  $A$  vrátane. Zistite všetky možné hodnoty čísla  $A$ .

*Výsledok.* 1999.

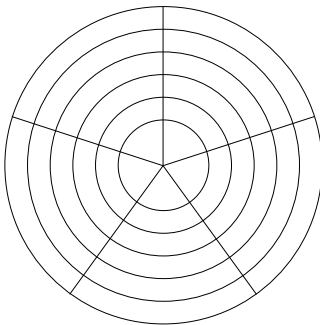
**Úloha 32 J / 22 S.** Amanda, Bohumila, Celestína, Dobroslava a Etelka hrajú turnaj v štvorhre v stolnom tenise. Každá dvojica hrala proti každej inej dvojici práve raz. Amanda vyhrala dokopy 12 zápasov a Bohumila ich vyhrala 6. Koľko zápasov mohla vyhrať Celestína? Nájdite všetky možnosti.

*Výsledok.* 4.

**Úloha 33 J / 23 S.** Dvaja hráči hrajú na uvedenom pláne pozostávajúceho z 30 políčok hru podľa nasledujúcich pravidiel:

- hráči sa striedajú v ťahoch,
- ťahom rozumieme vyfarbenie práve jedného políčka,
- v prvom ťahu sa vyfarbí políčko susediace s vonkajším terča a v každom ďalšom ťahu sa vyfarbí políčko, ktoré susedí s posledným vyfarbeným políčkom a nie je ďalej od stredu,
- vyfarbené políčko sa nesmie znovu vyfarbovať,
- kto nemôže potiahnuť, prehral.

Koľko políčok bude vyfarbených na konci hry, v ktorej obaja hráči hrajú bezchybne a ten, kto nemôže vyhrať, sa snaží hru čo najviac predĺžovať?



*Výsledok.* 18.

**Úloha 34 J / 24 S.** V trojuholníku  $ABC$  platí  $|AC| = |BC|$ . Vo vnútri strany  $AB$  bližšie k bodu  $B$  určíme bod  $P$  tak, aby  $|\sphericalangle ACP| = 30^\circ$ . Ďalej určíme bod  $Q$  tak, aby  $|\sphericalangle CPQ| = 78^\circ$  a aby body  $C$  a  $Q$  ležali v opačných polrovinách určených priamkou  $AB$ . Vieme, že všetky uhly v trojuholníkoch  $ABC$  a  $PQB$  sú vyjadrené celočíselne v stupňoch. Zistite, aké hodnoty môže nadobúdať uhol  $BQP$ .

*Výsledok.*  $1^\circ$ .

**Úloha 35 J / 25 S.** Desať ľudí sedelo za radom vedľa seba v divadle. Po prestávke si sadli tak, že práve dvaja z nich zostali na svojich pôvodných miestach a zvyšných osem sa posadilo na stoličku jedného zo susedov. Koľkými spôsobmi to mohli urobiť?

*Výsledok.*  $15 = \binom{6}{2}$ .

**Úloha 36 J / 26 S.** Na každej stene kocky je napísané prirodzené číslo. Každému vrcholu kocky priradíme súčin čísel napísaných na troch príľahlých stenách. Vieme, že súčet čísel priradených vrcholom je 165. Aké hodnoty môže nadobúdať súčet čísel na stenách?

*Výsledok.* 19.

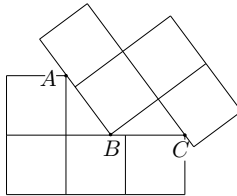
**Úloha 37 J / 27 S.** Dvaja cyklisti pretekali na rovnej ulici v cestnom maratóne. Štartovali spoločne v rovnaký čas a z rovnakého konca ulice. Ak ľubovoľný z nich dorazil na ľubovoľný koniec ulice, tak sa otočil a išiel späť. Do okamihu, kým sa obaja zase stretli na jednom z koncov ulice, prešiel prvý z nich ulicu 47-krát a druhý 35-krát. Koľkokrát sa počas tejto doby čelne minuli?

*Výsledok.* 40.

**Úloha 38 J / 28 S.** Nájdite najväčšie prirodzené číslo také, že všetky cifry okrem prvej a poslednej sú menšie ako aritmetický priemer susedných dvoch cifier.

*Výsledok.* 96433469.

**Úloha 39 J / 29 S.** Dve tetrisové kocky zostavené zo štvorcov o rozmeroch  $1 \times 1$  dm sa dotýkajú v bodoch  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ako na obrázku. Určte vzdialenosť  $|AB|$ .



*Výsledok.*  $\frac{5}{4}$  dm = 1,25 dm.

**Úloha 40 J / 30 S.** V rovine je daných 100 rôznych mrežových bodov. Každé dva rôzne body spojíme úsečkou. Najmenej koľko z týchto úsečiek má stred v mrežovom bode?

Poznámka: bod v rovine nazývame *mrežový*, ak sú obe jeho súradnice celočíselné.

*Výsledok.*  $1200 = 4 \cdot \binom{25}{2}$ .

**Úloha 41 J / 31 S.** Päťciferné číslo nazveme *nerozložiteľné*, ak sa nedá napísať ako súčin dvoch trojčiferných čísel. Najviac koľko nerozložiteľných čísel môže nasledovať bezprostredne za sebou?

*Výsledok.* 99.

**Úloha 42 J / 32 S.** Reálne čísla  $x$  a  $y$  spĺňajú  $(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 14^2$ . Nájdite minimálnu hodnotu výrazu  $x^2 + y^2$ .

*Výsledok.* 1.

**Úloha 43 J / 33 S.** Postupnosť vytvárame postupne pomocou vzorca

$$a_{n+2} = a_n - \frac{1}{a_{n+1}},$$

kým má pravá strana zmysel (tj. nedelí sa nulou). Navyše vieme, že  $a_1 = 20$  a  $a_2 = 11$ . Určte najmenšie  $t$  také, že  $a_t = 0$ .

*Výsledok.* 222.

**Úloha 44 J / 34 S.** Je daný ostrouhlý trojuholník  $ABC$  s výškami  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , ktoré sa pretínajú v bode  $H$ . Navyše platí

$$\frac{|AH|}{|HA'|} = 1, \quad \frac{|BH|}{|HB'|} = 2.$$

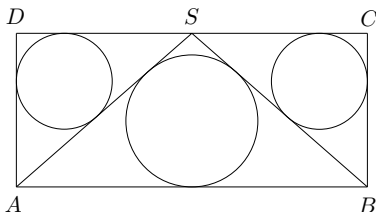
Určte  $|CH|/|HC'|$ .

*Výsledok.* 5.

**Úloha 45 J / 35 S.** Na oslave každý (vrátane Ondra) pozná práve sedem chlapcov a presne desať dievčat. Známosti sú vzájomné a nikto nepozná sám seba. Koľko najmenej ľudí mohlo byť na oslave?

*Výsledok.* 34.

**Úloha 46 J / 36 S.** Bod  $S$  je stredom strany  $CD$  obdĺžnika  $ABCD$ . Obe kružnice vpísané trojuholníkom  $ASD$  a  $BSC$  majú polomer 3 a kružnica vpísaná trojuholníku  $ASB$  má polomer 4. Určte veľkosti strán obdĺžnika.



*Výsledok.* 9, 24.

**Úloha 47 J / 37 S.** Kladných deliteľov prirodzeného čísla  $n$  menších od  $n$  si napíšeme od najväčšieho po najmenšieho. Ak je súčet druhého a tretieho napísaného čísla rovný prvému napísanému číslu, tak číslo  $n$  nazveme *sčítacie*. Koľko existuje sčítacích čísel menších ako 15000?

*Výsledok.* 1000.

**Úloha 48 J / 38 S.** Nájdite všetky reálne čísla  $x$  spĺňajúce vzťah

$$\frac{x-49}{50} + \frac{x-50}{49} = \frac{50}{x-49} + \frac{49}{x-50}.$$

*Výsledok.* 99, 0,  $\frac{4901}{99} = 49\frac{50}{99}$ .

**Úloha 49 J / 39 S.** Umiestnenie hodinovej a minútovej ručičky na ciferníku nazývame *korektné*, ak vyjadruje skutočný čas v priebehu dňa. Zistite, koľko existuje takých korektných umiestnení, ktoré zostanú korektné aj po zámene ručičiek.

*Výsledok.* 143.

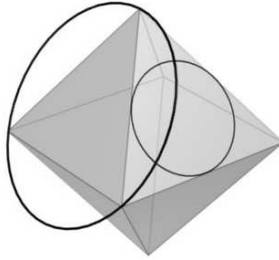
**Úloha 50 J / 40 S.** Nech  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sú také nenulové reálne čísla, že kvadratické trojčleny  $ax^2+bx+c$  a  $bx^2+cx+a$  majú spoločný koreň. Určte, aké hodnoty môže tento spoločný koreň nadobúdať.

*Výsledok.* 1.

**Úloha 51 J / 41 S.** Nájdite všetky celé čísla  $n$  také, že obe čísla  $16n + 9$  a  $9n + 16$  sú druhými mocninami nejakých prirodzených čísel.

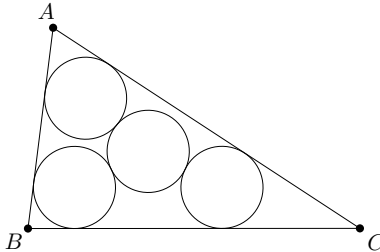
*Výsledok.* 0, 1, 52.

**Úloha 52 J / 42 S.** Je daný pravidelný osemsten s hranou dĺžky 2. Jednej jeho stene vpišeme kružnicu a stene s ňou susediacej kružnicu opišeme. Aká je najmenšia vzdialenosť medzi týmito dvoma kružnicami?



*Výsledok.*  $\sqrt{2} - 1 = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ .

**Úloha 53 J / 43 S.** Je daný trojuholník  $ABC$  s polomerom opísanej kružnice 5 a polomerom vpísanej kružnice 2. Vnútri trojuholníka sú do uhlov  $BAC$ ,  $CBA$ ,  $ACB$  vpísané zhodné kružnice s polomerom  $r$  tak, že existuje ďalšia kružnica s polomerom  $r$ , ktorá má so všetkými z nich vonkajší dotyk. Určte  $r$ .



*Výsledok.*  $\frac{10}{9}$ .

**Úloha 54 J / 44 S.** Pre reálne čísla  $a$ ,  $b$ ,  $x$ ,  $y$  platí

$$\begin{aligned} ax + by &= 3, \\ ax^2 + by^2 &= 7, \\ ax^3 + by^3 &= 16, \\ ax^4 + by^4 &= 42. \end{aligned}$$

Určte hodnotu  $ax^5 + by^5$ .

*Výsledok.* 20.