

Úloha 1 J. Čitateľ aj menovateľ Jefovho zlomku sú prirodzené čísla so súčtom 2011. Hodnota zlomku je pritom menšia ako $1/3$. Aká najväčšia môže byť hodnota Jefovho zlomku?

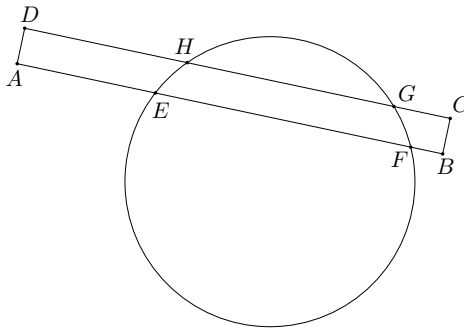
Výsledok. $\frac{502}{1509}$.

Návod. Hľadáme vlastne najväčší prirodzené číslo $a < 2011$ splňujúci nerovnicu

$$\frac{a}{2011 - a} < \frac{1}{3}.$$

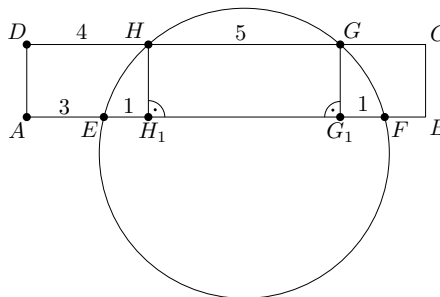
Tu ekvivalentne upravíme do tvaru $4a < 2011$ a vidíme, že najväčší vyhovujúci a je 502 a výsledný zlomek je pak roven $\frac{502}{1509}$.

Úloha 2 J. Na obrázku pretína obdĺžnik $ABCD$ kružnicu v bodoch E, F, G, H . Vieme, že $|AE| = 3$, $|DH| = 4$ a $|GH| = 5$. Vypočítajte dĺžku úsečky EF .



Výsledok. 7.

Návod.



Označme G_1, H_1 po radě průměty bodů G, H na přímku AB . Potom zřejmě $|H_1G_1| = |HG| = 5$. Dále si všimneme, že díky osové souměrnosti je $|EH_1| = |G_1F|$ a navíc $|EH_1| = |DH| - |AE| = 1$. Tedy $|EF| = |EH_1| + |H_1G_1| + |G_1F| = 7$.

Úloha 3 J. Vypočítajte ciferný súčet čísla $1 + 11 + 101 + 1001 + 10001 + \dots + \underbrace{10\dots01}_{50}$.

Výsledok. 58.

Návod. Upravujeme

$$\begin{aligned} 1 + 11 + 101 + 1001 + \dots + \underbrace{10\dots01}_{50} &= \\ &= 1 + (10 + 1) + (100 + 1) + (1000 + 1) + \dots + (\underbrace{10\dots0}_{51} + 1) = \underbrace{11\dots110}_{51} + 52 = \underbrace{11\dots1162}_{50}. \end{aligned}$$

Hľadaný ciferný súčet je tedy roven 58.

Úloha 4 J. Niekoľko mandarínok sme rozdelili do troch sáčkov. V prvom sáčku je o šesť mandarínok menej ako v zvyšných dvoch sáčkoch dohromady. Podobne, v druhom sáčku je o 10 mandarínok menej ako v zvyšných dvoch sáčkoch dohromady. Koľko mandarínok je v treťom sáčku?

Výsledok. 8.

Návod. Označme a , b , c postupne počty mandarínok v prvom, druhom a treťom sáčku. Podle zadání je

$$\begin{aligned} a &= b + c - 6, \\ b &= a + c - 10. \end{aligned}$$

Po sečtení rovnic můžeme od obou stran odečíst $a + b$ a dopočteme $c = 8$.

Úloha 5 J. Na stole je 33 orechov rozdelených aspoň na dve kôpky. V každej kôpke sú aspoň dva orechy. Ak zo všetkých kôpok zoberieme jeden orech a položíme ho na prvú kôpku, tak bude na všetkých kôpkach rovnako veľa orechov. Koľko kôpok mohlo byť pôvodne na stole? Zistite všetky možnosti.

Výsledok. 3.

Návod. Pretože nakonec bylo ve všech hromádkách stejně ořechů, musel být počet hromádek dělitelem čísla 33. Možnosti 33 a 11 však nevyhovují, protože v obou případech by na počátku musel být počet ořechů v první hromádce záporný. Počáteční situace se 3 hromádkami postupně s 9, 12 a 12 ořechy vyhovuje.

Úloha 6 J. Obdlžnik je dvoma úsečkami rovnobežnými s jeho stranami rozdelený na štyri menšie obdlžniky. Označme ich A , B , C , D rovnako ako na obrázku. Obvody obdlžnikov A , B a C sú rade 2 cm, 4 cm a 7 cm. Aké hodnoty môže nadobúdať obvod obdlžnika D ?

A	B
C	D

Výsledok. 9 cm.

Návod.

A	x	B
t		y
C	z	D

Označme dĺžky x, y, z, t jako na obrázku. Pro obvody obdĺlníkú o_A, o_B, o_C, o_D pak platí

$$o_A + o_D = 2(t + x) + 2(y + z) = 2(x + y) + 2(t + z) = o_B + o_C,$$

takže $o_D = 4 + 7 - 2 = 9$ cm.

Úloha 7 J. Nájdite rozdielne cifry A, B a C (v desiatkovej sústave) také, aby platil nasledujúci sčítací vzťah:

$$\begin{array}{r} A \\ AB \\ \underline{ABC} \\ BCB \end{array}$$

Výsledok. $A = 6, B = 7, C = 4$.

Návod. Jelikož cifry A a C nemohou být obě zároveň nulové, muselo mezi sloupci jednotek a desítek dojít k přenosu. Jelikož $A \neq B$, muselo k přenosu dojít i mezi sloupci desítek a stovek. Můžeme tedy postupně zprava psát $A + C = 10, A + B + 1 = C + 10$ a $B = A + 1$. Vyřešením těchto tří rovnic získáme $A = 6, B = 7$ a $C = 4$.

Úloha 8 J. Určte obsah obdĺžnika, ak viete, že jeho obvod je 10 cm a jeho uhlopriečka má dĺžku $\sqrt{15}$ cm.

Výsledok. 5 cm².

Návod. Označme a, b dĺžky stran obdĺžnika v centimetrech. Ze zadání $2(a+b) = 10, a^2 + b^2 = 15$. Hodnotu ab určíme napríklad pomocí

$$2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 5^2 - 15 = 10.$$

Obsah je tedy 5 cm².

Úloha 9 J. Edo si zobral N^3 rovnako veľkých kociek a postavil z nich jednu veľkú kocku o rozmeroch $N \times N \times N$. Celý povrch veľkej kocky zafarbil a potom ju celú rozložil na pôvodné kocky. Určte N , ak viete, že je zafarbená desatina celkového povrchu malých kociek.

Výsledok. 10.

Návod. Označme S plochu jedné stěny krychličky. Povrch všech krychliček je $6S \cdot N^3$ a povrch velké krychle je $6S \cdot N^2$. Pokud je obarvena jedna desetina celkového povrchu všech krychliček, musí platit $6S \cdot N^2 = \frac{6S}{10} N^3$. Odtud vychází $N = 10$.

Úloha 10 J. Koľko najmenej členov má matematický klub, v ktorom je zastúpenie žien väčšie ako 48,5%, ale menšie ako 50%?

Výsledok. 35.

Návod. Nechť n značí počet členů klubu. Podívejme se, o jakou nejmenší část se můžeme odchýlit od jedné poloviny. Pro sudá n se můžeme odchýlit o $\frac{1}{n}$ (například pro $n = 10$ se od čísla $\frac{5}{10}$ odchýlíme o $\frac{1}{10}$ k číslu $\frac{4}{10}$), zatímco pro lichá n dokonce jen o $\frac{1/2}{n}$ (pro $n = 11$ od $\frac{5+1/2}{11}$ k $\frac{5}{11}$). Odtud vidíme, že je výhodnější hledat lichá n . Zbývá najít nejmenší liché n splňující $\frac{1}{2n} < 1,5\% = \frac{3}{200}$, kterým je $n = 35$.

Úloha 11 J / 1 S. Ak zväčšíte číslo úlohy, ktorú práve držíte v ruke o číslo n , získate číslo úlohy s najviac šokujúcim zadáním. Ak ho ale zväčšíte o dvojciferné číslo k , získate číslo najhravejšej úlohy. Naviac platí, že $n^3 = k^2$. Určte n a k , ak viete, že vám zostáva ešte 44 úloh (vrátane tejto).

Výsledok. $n = 9, k = 27$.

Návod. Aby k^2 bylo třetí mocninou přirozeného čísla, musí být rovněž k třetí mocninou přirozeného čísla. Jediné takové dvojciferné $k < 44$ je $k = 27$. Zbývá dopočítat $n = 9$.

Úloha 12 J / 2 S. Nájďte prirodzené číslo n spĺňajúce vzťah $6666^2 + 8888^2 = n^2$.

Výsledok. 11110.

Návod. Počítání si usnadníme vytýkáním, tedy

$$n = \sqrt{1111^2 \cdot 6^2 + 1111^2 \cdot 8^2} = 1111\sqrt{36 + 64} = 11110.$$

Úloha 13 J / 3 S. Nájďte najmenšie prirodzené číslo, ktorého desiatkový zápis končí na 17, je deliteľné 17–timi a má ciferný súčet 17.

Výsledok. 15317.

Návod. Hľadané číslo si napíšeme ve tvaru $100 \cdot a + 17$ pro nějaké $a \in \mathbb{N}_0$. Za zadání plyne, že a je dělitelné 17 a má ciferný součet 9. Pak ovšem musí být a nenulové a dělitelné 9 (podle kritéria pro dělitelnost 9), tudíž $a \geq 17 \cdot 9 = 153$, přičemž 15317 vyhovuje.

Úloha 14 J / 4 S. Každá dvojica po sebe idúcich cifier istého 2011-ciferného čísla je násobkom 17 alebo 23. Jeho posledná cifra je 1. Určte jeho prvú cifru.

Výsledok. 3.

Návod. Vypsáním dvojciferných násobků čísel 17 a 23 zjistíme, že každé cifře 1 až 9 na místě jednotek odpovídá právě jedna cifra na místě desítek. Hľadané číslo vytváříme odzadu jako ... 92346 92346 851. Zbývá dopočítat, že $2011 = 3 + 401 \cdot 5 + 3$, takže první cifra hľadaného čísla je třetí cifra odzadu v sekvenci 92346.

Úloha 15 J / 5 S. Prirodzené číslo nazveme *luxusné*, ak každé iné číslo s rovnakým ciferným súčtom je od neho väčšie. Zistite, koľko je trojiciferných luxusných čísel.

Výsledok. 9.

Návod. Uvědomíme si, že pro každou hodnotu ciferného součtu $k \in \mathbb{N}$ existuje právě jedno nejmenší číslo s tímto ciferným součtem, a tedy i právě jedno luxusní číslo. Označme ho $l(k)$. Jelikož dvojciferná čísla nabývají všech hodnot ciferného součtu od 1 do 18, jsou čísla $l(1), \dots, l(18)$ nejvýše dvojciferná. Protože ciferné součty trojiciferných čísel nabývají všech hodnot od 1 do 27, jsou luxusní čísla $l(19), \dots, l(27)$ trojiciferná a je jich 9.

Úloha 16 J / 6 S. Škrečkově reálné čísla x, y, z splňují $(x - y)/(z - y) = -10$. Aké hodnoty může nadobúdat výraz $(x - z)/(y - z)$? Nájďte všetky možnosti.

Výsledok. 11.

Návod.

$$\frac{x - z}{y - z} = \frac{(x - y) + (y - z)}{y - z} = \frac{x - y}{y - z} + \frac{y - z}{y - z} = 10 + 1 = 11.$$

Úloha 17 J / 7 S. Čísllice 1, 2, ..., 9 napíšeme za sebou v nejakom poradí tak, aby vzniklo deväťciferné číslo. Uvažujme všetky trojice po sebe idúcich cifier tohto čísla a k týmto trojiciam zodpovedajúce trojiciferné čísla sčítame. Aký najväčší výsledok môžeme dostať?

Výsledok. 4648.

Návod. Označíme cifry a_1, a_2, \dots, a_9 . Jednotlivé trojice jsou pak rovny:

$$100a_1 + 10a_2 + a_3, \quad 100a_2 + 10a_3 + a_4, \quad 100a_3 + 10a_4 + a_5, \quad \dots, \quad 100a_7 + 10a_8 + a_9,$$

takže jejich součet je roven

$$100a_1 + 110a_2 + 111a_3 + \dots + 111a_7 + 11a_8 + 1a_9.$$

Chceme-li tento součet maximalizovat, použijeme nejvyšší čísla pro cifry a_3 až a_7 . Dále $a_2 = 4$, $a_1 = 3$, $a_8 = 2$, $a_9 = 1$. Součet vyjde

$$111 \cdot (5 + \dots + 9) + 4 \cdot 110 + 3 \cdot 100 + 2 \cdot 11 + 1 \cdot 1 = 4648.$$

Úloha 18 J / 8 S. V každom políčku tabuľky 10×10 je napísané číslo. Filip si vybral dve čísla z tabuľky a do zošita si napísal ich súčin. Toto spravil pre všetky dvojice čísel z tabuľky. Všimol si, že práve 1000 z týchto súčinov je záporných. Koľko z pôvodných čísel mohlo byť rovných nule? Vypíšte všetky možnosti.

Výsledok. 30, 35.

Návod. Označme postupně k, z počty kladných, resp. záporných čísel a $n = 100 - k - z$ počet nul. Součin dvou čísel je záporný, právě když je jedno z nich kladné a druhé záporné. Počet možností, jak vybrat jedno kladné číslo z k a jedno záporné ze z , je $k \cdot z$. Kromě samozřejmého $k + z \leq 100$ tedy musí platit i $k \cdot z = 1000$. Tomu vyhovují jen neuspořádané dvojice 20, 50 a 25, 40 skýtající postupně $n = 30, n = 35$.

Úloha 19 J / 9 S. V istom kráľovstve začali raziť mince. Počas prvého dňa razili mince v hodnote 1 fufeň. Každý ďalší deň razili mince v najmenšej hodnote, ktorá sa nedala zaplatiť pomocou maximálne desiatich už vyrazených mincí. Mince akej hodnoty razili počas 2011-teho dňa?

Výsledok. 20101 (fufníkú).

Návod. Indukci dokážeme, že během k -tého dne razili mince o hodnotě $10(k - 1) + 1$. První krok splněn je, pro druhý si všimněme, že pomocí nejvyšší mince (o hodnotě H) a odpovídajícího počtu mincí o hodnotě 1 umíme zaplatit částky $H + 1$ až $H + 9$. Naopak $H + 10$ zaplatit nelze, neboť jak požadovaná částka, tak hodnoty všech doposud vyrobených mincí dávají po dělení deseti zbytek 1. Výsledek plyne dosazením.

Úloha 20 J / 10 S. Označme p riešenie úlohy na tomto papieri. Určte pravdepodobnosť (číslo z intervalu $(0, 1)$), že náhodne vybraný bod vnútri štvorca so stranou 1 cm je od všetkých jeho strán vzdialený aspoň p cm.

Výsledok. $\frac{1}{4}$.

Návod. Bod je od každej strany vzdialený alespoň p cm práve tehdy, když je uvnitř čtverce o straně $1 - 2p$ umístěného uprostřed (má-li tento čtverec nezápornou velikost). Pravděpodobnost spočítáme jako podíl obsahů, tedy

$$\frac{(1 - 2p)^2}{1^2} = p.$$

Tato kvadratická rovnice má dvě řešení: $p = \frac{1}{4}$ zadání vyhovuje, $p = 1$ ne.

Úloha 21 J / 11 S. Tabuľka 3×3 je vyplnená celými číslami. Súčty čísel v riadkoch zhora nadol stúpajú o 2 a súčty čísel v stĺpcoch zľava doprava sa zdvojnásobujú. Ak je súčet jedného z riadkov 2011, tak aký je súčet čísel v ľavom stĺpci?

Výsledok. 861.

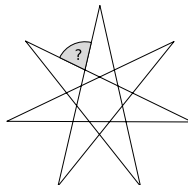
Návod. Označme a součet čísel v prvním řádku a b součet čísel v levém sloupci. Součet všech čísel v tabulce vyjádříme dvěma způsoby, a to jako $3a + 6$ (sčítáme-li po řádcích) a $7b$ (sčítáme-li po sloupcích). Tedy $3a + 6$ je dělitelné sedmi, z čehož plyne, že a dává po dělení sedmi zbytek 5. Číslo 2011 dává po dělení sedmi zbytek 2, takže jde o součet čísel ve třetím řádku a platí $2011 = a + 4$. Zbývá dopočítat $b = \frac{3a+6}{7} = 861$.

Úloha 22 J / 12 S. Dva trajekty vyplávali naraz proti sebe cez zátoku. Oba plávali po priamke konštantnou, ale rozdielnou rýchlosťou. Prvýkrát sa stretli vo vzdialenosti 100 m od jedného brehu. Keď každý z nich doplával k protifaľnému brehu, ihneď sa otočil a plával rovnakou cestou naspäť. Na spiatocnej ceste sa stretli trajekty vo vzdialenosti 70 m od druhého brehu. Aká široká je zátoka?

Výsledok. 230 m.

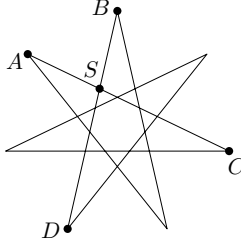
Návod. Označme S šířku zátoky v metrech. Když se trajekty míjely poprvé, měly dohromady najeto S metrů, když se míjely podruhé, měly najeto $3S$ metrů. Jelikož trajekty jedou konstantními rychlostmi, nastalo jejich druhé setkání po třikrát delším čase než to první. Pro ten trajekt, který do prvního setkání najel 100 metrů, lze tedy sestavit rovnici $3 \cdot 100 = S + 70$, z níž $S = 230$ plyne bezprostředně.

Úloha 23 J / 13 S. Vrcholy hviezdy na obrázku tvoria pravidelný sedemuholník. Aká je veľkosť vyznačeného uhla?



Výsledok. $\frac{3\pi}{7} = \frac{540^\circ}{7} = 77^\circ + \frac{1^\circ}{7}$.

Návod.



Označme body A, B, C, D, S jako na obrázku. Pokud otočíme úsečku AC kolem středu hvězdy o $2\pi \cdot \frac{2}{7}$ proti směru hodinových ručiček, dostaneme úsečku DB . Tedy $|\angle DSA| = \frac{4\pi}{7}$, úhel ASB je pak jeho doplněk.

Úloha 24 J / 14 S. Nайдите x splňající vztah $2^{2^{3^{2^2}}} = 4^{4^x}$.

Poznámka: poschodové mocniny sa vyhodnocujú zhora, tj. $4^{3^2} = 4^9$.

Výsledok. 40.

Návod. Upravíme pravou stranu rovnice:

$$4^{4^x} = (2^2)^{(2^2)^x} = 2^{2 \cdot 2^{2x}} = 2^{2^{2x+1}}.$$

Požadované rovnosti tedy bude dosaženo, pokud $2x + 1 = 3^{2^2} = 3^4 = 81$, neboli $x = 40$.

Úloha 25 J / 15 S. Zistite počet usporiadaných trojíc prirodzených čísel (a, b, c) takých, že $a + b + c \leq 30$ a

$$\frac{\frac{a}{c} + \frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + \frac{b}{c} + 1} = 11$$

Výsledok. 24.

Návod. První jedničku zapišeme jako $\frac{a}{a}$, druhou jako $\frac{b}{b}$. Potom

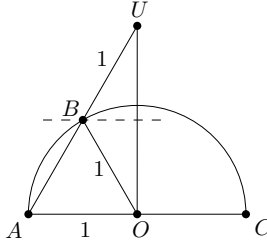
$$\frac{\frac{a}{c} + \frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + \frac{b}{c} + 1} = \frac{a \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)}{b \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} \right)} = \frac{a}{b} = 11.$$

Pro $b = 1$, $a = 11$ vyhovuje $c = 1, 2, \dots, 18$ a pro $b = 2$, $a = 22$ vyhovuje $c = 1, 2, \dots, 6$, což dává celkem 24 trojic.

Úloha 26 J / 16 S. V rovine je daná kružnica s polomerom 1, stredom O a priemerom AC . Označme p kolmicu na priemer AC prechádzajúcu bodom O . Zvolíme bod U na priamke p mimo kružnice taký, že ak označíme druhý priesečník kružnice s priamkou AU ako B , tak platí $|BU| = 1$. Určte dĺžku úsečky OU .

Výsledok. $\sqrt{3}$.

Návod.



Jelikož $|OB| = 1 = |BU|$, je trojúhelník OUB rovnoramenný. Bod B tak leží na ose odvěsny pravoúhlého trojúhelníku AOU a zároveň na jeho přeponě, takže je středem této přepony. Tím pádem i $|AB| = 1$ a z Pythagorovy věty dopočteme $|OU| = \sqrt{3}$.

Úloha 27 J / 17 S. Bitky dvou armád A a B sa zúčastnilo dokopy 1000 vojakov. Armády strelali v salvách. V každej salve zastrelil každý vojak jedného vojaka z nepriateľskej armády (ak je to možné, tak každý iného). V tejto bitke strelala najprv armáda A , potom armáda B a nakoniec armáda A . Najmenej koľko vojakov bitku určite prežilo?

Výsledok. 200.

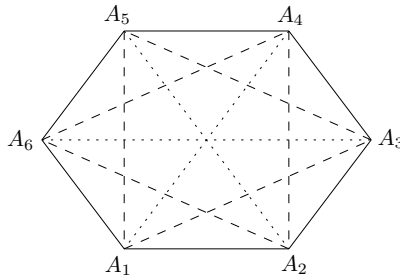
Návod. Předpokládejme, že přežilo n vojáků, z toho a ($a \leq n$) v armádě A a $n - a$ v armádě B . Počet vojáků v B před třetí salvou tedy byl nejvýše $(n - a) + a = n$ a počet vojáků v A byl nejvýše n . Před druhou salvou bylo v B nejvýše n vojáků a v A nejvýše $n + n = 2n$ vojáků. Konečně před první salvou bylo v B nejvýše $n + 2n = 3n$ vojáků a v A nejvýše $2n$ vojáků.

Na začátku bitvy mohlo bojovat maximálně $5n$ vojáků, tj. $1000 \leq 5n$ a máme $n \geq 200$. Tento stav je dosažitelný, neboť volbou $a = n = 200$ se každé maximální hodnoty nabyde.

Úloha 28 J / 18 S. Všetkých šesť strán konvexného šesťuholníka $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ je zafarbených na červeno. Každú z uhlopriečok zafarbíme buď na červeno, alebo na modro. Koľko je zafarbení takých, že každý trojuholník $A_iA_jA_k$ ($i \neq j \neq k \neq i$) má aspoň jednu zo svojich strán zafarbenú na červeno?

Výsledok. $392 = 7 \cdot 7 \cdot 8$.

Návod. Kromě trojúhelníků $A_1A_3A_5$ a $A_2A_4A_6$ (na obrázku čárkovaně) všechny ostatní trojúhelníky již mají červenou hranu. Každý čárkovaný trojúhelník můžeme obarvit $2^3 - 1 = 7$ způsoby, protože nemůžeme všechny jeho hrany obarvit modře. Nakonec ještě můžeme dohromady $2^3 = 8$ způsoby obarvit tečkovaně vyznačené úhlopříčky A_1A_4 , A_2A_5 , A_3A_6 . Celkem máme $7 \cdot 7 \cdot 8 = 392$ vyhovujících obarvení.



Úloha 29 J / 19 S. Petržlen najskôr povedal jedno prirodzené číslo Škrečkovi a jedno prirodzené číslo Jefovi. Potom im povedal, že ich čísla sú rôzne a súčet ich čísel je dvojciferné číslo. Následne sa začali Škrečok s Jefom rozprávať:

Škrečok: „Neviem povedať, kto z nás má väčšie číslo.“

Jefo: „Ani ja, ale prezradím, že moje číslo je deliteľné 17—mi.“

Škrečok: „Aha!, tak ja už teraz viem aký je súčet našich čísel.“

Čomu sa rovná tento súčet, ak obaja uvažovali bezchybne?

Výsledok. 51.

Návod. To, že Škrečok ani Jeffo neumí určiť, kto z nich má väčší číslo, znamená, že oba majú číslo menšie než 50. Kdyby tomu tak nebylo, součet by byl trojčiferný. Jelikož má Jeffo číslo dělitelné 17, musí mít 17 nebo 34. Aby mohl Škrečok jednoznačně určit, které z těchto dvou čísel Jeffo má, musí mít sám to druhé (jejich čísla jsou ze zadání různá). Hledaným součtem je proto 51.

Úloha 30 J / 20 S. V kaviarni sú Indovia a Turci a dohromady je ich 55. Každý z nich pije buď kávu alebo čaj. Ind je pravdovravný práve vtedy, keď pije čaj. Turek je pravdovravný práve vtedy, keď pije kávu. Na otázky: „Pijete kávu?“, „Ste Turek?“ a „Prší vonku?“ boli počty kladných odpovedí postupne 44, 33 a 22 (každý odpovedal práve raz). Koľko Indov pije čaj? Nájdite všetky možnosti.

Výsledok. 0.

Návod. Nejprve si uvědomíme, že na otázku „Pijete kávu?“ odpoví kladně právě Turci a na otázku „Jste Turek?“ odpoví kladně právě ti, kdo pijí kávu.

Víme tedy, že Turků je 44 a těch, kdo pijí kávu, je 33. Z toho dopočteme, že Indů je 11 a těch, kteří pijí čaj, je 22. Když sečteme počet Indů a počet lidí pijících čaj a odečteme od toho počet lidí, kteří lžou, dostaneme dvojnásobek počtu Indů pijících čaj.

Pokud venku prší, lže 33 lidí a čaj pije 0 Indů, pokud venku neprší, lže 22 lidí a čaj tak pije $\frac{11}{2}$ Indů. Necelou možnost kvůli humánnosti zavrhuje.

Úloha 31 J / 21 S. Za pravý koniec prirodzeného čísla A v desiatkovom zápise boli dopísané tri cifry, čím vzniklo číslo, ktoré je súčtom všetkých prirodzených čísel od 1 po A vrátane. Zistite všetky možné hodnoty čísla A .

Výsledok. 1999.

Návod. Označme B připsané trojčíslí. Jelikož $1 + 2 + \dots + A = \frac{1}{2}A(A + 1)$, máme dle zadání

$$1000A + B = \frac{A(A + 1)}{2},$$

což upravíme na $2B = A(A - 1999)$. Levá strana je alespoň 0 a nejvýše $2 \cdot 999$, zatímco pravá strana je pro přirozené $A \leq 1998$ záporná a pro $A \geq 2000$ alespoň $2000 \cdot 1$. Jediné možné $A = 1999$ vyhovuje pro $B = 000$.

Úloha 32 J / 22 S. Amanda, Bohumila, Celestína, Dobroslava a Etelka hrajú turnaj v štvorhre v stolnom tenise. Každá dvojica hrala proti každej inej dvojici práve raz. Amanda vyhrala dokopy 12 zápasov a Bohumila ich vyhrala 6. Koľko zápasov mohla vyhrať Celestína? Nájdite všetky možnosti.

Výsledok. 4.

Návod. Spočítáme, kolik zápasů odehraje jedna hráčka. Chceme-li vytvořit zápas s danou hráčkou H , vybereme si, která hráčka ze zbývajících hrát nebude (4 možnosti) a která z hrajících bude hrát s H (3 možnosti). Každá hráčka tedy odehraje 12 zápasů.

Z toho rovnou vidíme, že Adéla vyhrála všechno. Dále spočítáme, kolik zápasů hrála Adéla proti Báře. Máme tři možnosti, kdo může hrát s Adélou, pak 2 možnosti, kdo ze zbývajících může hrát s Bářou. Bára tedy prohrála 6 zápasů proti Adéle, všechny ostatní tak musela vyhrát.

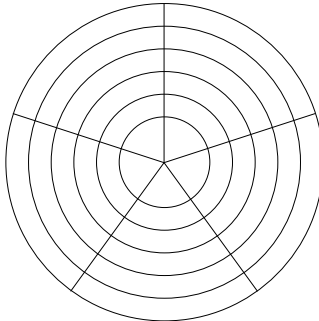
Nyní už víme, jak poznat, která dvojice vyhrála. Je to ta, kde hrála Adéla, a byla-li Adéla mimo hru, vyhrála dvojice obsahující Bారు.

Když hrála Cilka s Adélou, byly 3 možnosti, kdo je mimo hru, tedy takto vyhrála Cilka 3 zápasy. Když vyhrála Cilka s Bářou, byla mimo hru Adéla, to se stalo jednou. Celkem tak Cilka vyhrála 4 zápasy.

Úloha 33 J / 23 S. Dva hráči hrají na uvedenom pláne pozostávajúceho z 30 políček hru podľa nasledujúcich pravidiel:

- hráči sa striedajú v ťahoch,
- ťahom rozumieme vyfarbenie práve jedného políčka,
- v prvom ťahu sa vyfarbí políčko susediace s vonkajškom terčom a v každom ďalšom ťahu sa vyfarbí políčko, ktoré susedí s posledným vyfarbeným políčkom a nie je ďalej od stredu,
- vyfarbené políčko sa nesmie znovu vyfarbovať,
- kto nemôže potiahnuť, prehral.

Kolko políček bude vyfarbených na konci hry, v ktorej obaja hráči hrajú bezchybne a ten, kto nemôže vyhrať, sa snaží hru čo najviac predĺžovať?



Výsledok. 18.

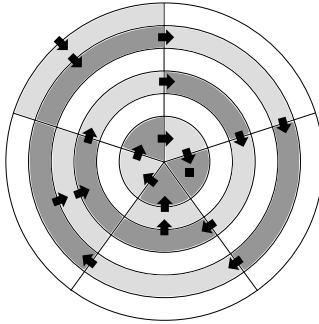
Návod. Jednotlivým mezikružím (včetně vnitřního kruhu) budeme říkat vrstvy. Za první považujeme tu na okraji, za šestou kruh uprostřed. Vrstvu s posledním vybarveným políčkem nazýváme aktuální.

Druhý hráč má následující vyhrávající strategii:

- Pokud je aktuální vrstva lichá, zahraje do následující vrstvy.
- v opačném případě v aktuální vrstvě zbývá licho volných políček, zahraje tedy do této vrstvy.

Touto strategií pošle vždy protihráče do pozice, kde je aktuální vrstva sudá a obsahuje sudo volných políček. Ten tak musí buď zahrát do liché vrstvy, nebo způsobit, že bude v aktuální vrstvě licho volných políček.

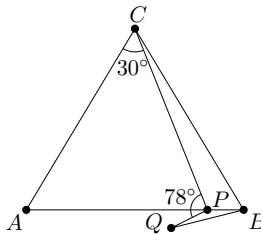
Druhý hráč prítom nemôže zahrát jinak, pretože by mu tak mohl prvni hráč strategii převzít. Prvni hráč bude hru prodlužovat tím, že bude oddalovat přesunutí se do další vrstvy. Hra tedy dopadne nějak takto:



Úloha 34 J / 24 S. V trojuholníku ABC platí $|AC| = |BC|$. Vo vnútri strany AB bližšie k bodu B určíme bod P tak, aby $|\sphericalangle ACP| = 30^\circ$. Ďalej určíme bod Q tak, aby $|\sphericalangle CPQ| = 78^\circ$ a aby body C a Q ležali v opačných polrovinách určených priamkou AB . Vieme, že všetky uhly v trojuholníkoch ABC a PQB sú vyjadrené celočíselne v stupňoch. Zistite, aké hodnoty môže nadobúdať uhol BQP .

Výsledok. 1° .

Návod.



Jelikož $|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle CBA| < |\sphericalangle CPA|$ a $|\sphericalangle PAC| + |\sphericalangle CPA| = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$, musí byť $|\sphericalangle PAC| < 75^\circ$. Jeho velikost ve stupních je ale celočíselná, takže musí být dokonce $|\sphericalangle PAC| \leq 74^\circ$ a $|\sphericalangle CPA| \geq 76^\circ$.

Zároveň ale $|\sphericalangle APQ| = |\sphericalangle PBQ| + |\sphericalangle BQP| \geq 1^\circ + 1^\circ = 2^\circ$, z čehož

$$78^\circ = |\sphericalangle CPQ| = |\sphericalangle CPA| + |\sphericalangle APQ| \geq 76^\circ + 2^\circ = 78^\circ.$$

Ve všech neostrých nerovnostech tedy musela nastat rovnost a speciálně $|\sphericalangle BQP| = 1^\circ$.

Úloha 35 J / 25 S. Desiat ľudí sedelo za radom vedľa seba v divadle. Po prestávke si sadli tak, že práve dvaja z nich zostali na svojich pôvodných miestach a zvyšných osem sa posadilo na stoličku jedného zo susedov. Kolkými spôsobmi to mohli urobiť?

Výsledok. $15 = \binom{6}{2}$.

Návod. Člověk, který původně seděl na levém okraji řady, musel zůstat sedět na svém místě nebo se prohodit se svým sousedem, neboť jeho místo nemohl obsadit nikdo jiný. Stejnou úvahu můžeme zopakovat pro dalšího člověka zleva, o jehož usazení jsme zatím nerozhodli. Každý tedy musel zůstat sedět na svém místě nebo se prohodit s jedním ze svých sousedů. Libovolné vyhovující rozsazení si proto můžeme představit jako posloupnost, která v nějakém pořadí obsahuje čtyři prvky P (reprezentující prohození dvou sousedů) a dva prvky M (reprezentující situaci, kdy člověk zůstal na svém místě). Počet vyhovujících rozsazení pak musí být roven počtu takovýchto posloupností, to jest $\binom{6}{2} = 15$.

Úloha 36 J / 26 S. Na každé stěně kocky je napísané prirodzené číslo. Každému vrcholu kocky priradíme súčin čísel napísaných na troch príľahlých stenách. Vieme, že súčet čísel priradených vrcholom je 165. Aké hodnoty môže nadobúdať súčet čísel na stenách?

Výsledok. 19.

Návod. Označme čísla na stenách písmeny a, b, c, d, e, f tak, aby proti sobě ležely dvojice a a f , b a e , c a d . Pak

$$3 \cdot 5 \cdot 11 = 165 = (a + f)(b + e)(c + d),$$

kde o druhé rovnosti se můžeme přesvědčit roznásobením. Jelikož čísla a až f jsou přirozená, je každá závorka na pravé straně přirozená a větší než 1. Závorky se tedy (v nějakém pořadí) rovnají číslům 3, 5 a 11. Součet čísel na stenách tak může být jediné $3 + 5 + 11 = 19$. Zkonstruovat příklad s požadovanými součty je snadné.

Úloha 37 J / 27 S. Dva cyklisti pretekali na rovnej ulici v cestnom maratóne. Štartovali spoločne v rovnaký čas a z rovnakého konca ulice. Ak ľubovoľný z nich dorazil na ľubovoľný koniec ulice, tak sa otočil a išiel späť. Do okamihu, kým sa obaja zase stretli na jednom z koncov ulice, prešiel prvý z nich ulicu 47-krát a druhý 35-krát. Koľkokrát sa počas tejto doby čelne minuli?

Výsledok. 40.

Návod. Na začátku jedou cyklisti stejným směrem. Pak se jeden z nich otočí, tedy pojedou proti sobě. Pak se čelně minou, tedy pojedou od sebe. Pak se jeden z nich otočí a jedou tak opět stejným směrem. Toto se opakuje, dokud neurazí své vzdálenosti, nakonec dorazí oba stejným směrem. V každém cyklu proběhnou dvě otočení se a jedno čelní minutí. První se otáčel 34 krát, druhý 46 krát, to je dohromady 80. Čelních minutí je pak dvakrát méně.

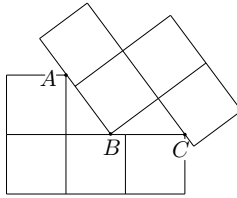
Úloha 38 J / 28 S. Nájdite najväčšie prirodzené číslo také, že všetky cifry okrem prvej a poslednej sú menšie ako aritmetický priemer susedných dvoch cifier.

Výsledok. 96433469.

Návod. Označme a_1, \dots, a_k cifry hľadaného čísla. Nejprve určíme maximální délku úseku, v němž cifry neklesají. Podmínku $a_i < \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2}$ přepíšeme jako $a_i - a_{i-1} < a_{i+1} - a_i$ a interpretujeme tak, že postupně rostou rozdíly mezi po sobě jdoucími ciframi. Pokud by čísel v rostoucím úseku bylo alespoň 5, byly by hodnoty rozdílů postupně rovny nejméně číslům 1, 2, 3, 4 a rozdíl mezi první a poslední cifrou by tak byl alespoň $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, což nelze. Každý rostoucí úsek má tedy nejvýše délku 4 a zcela obdobně odvodíme, že i každý klesající úsek má nejvýše délku čtyři.

Jelikož rozdíly mezi po sobě jdoucími ciframi postupně rostou, nejdříve mohou být tyto rozdíly záporné – tam budou samotné cifry klesat, pak může být rozdíl jednou nulový a pak budou rozdíly kladné – tam budou samotné cifry růst. Odtud plyne, že hľadané číslo se skládá z jednoho klesajícího úseku a jednoho rostoucího úseku a má tedy nejvýše 8 cifer. Nyní začneme osmiciferná čísla zkoušet od největších. Ta, která začínají dvojicemi cifer 99, 98, 97, nemohou tvořit dostatečně dlouhé klesající úseky a jako řešení tak nalézáme číslo 96433469.

Úloha 39 J / 29 S. Dve tetrisové kocky zostavené zo štvorcov o rozmeroch 1×1 dm sa dotýkajú v bodoch A , B , C ako na obrázku. Určte vzdialenosť $|AB|$.



Výsledok. $\frac{5}{4}$ dm = 1,25 dm.

Návod. Pravoúhlé trojúhelníky s přeponami AB a BC jsou shodné podle věty *usu*. Označme x jejich kratší odvěsnu. Platí $2 = x + |BC| = x + |AB|$ a podle Pythagorovy věty také $x^2 + 1 = |AB|^2$. Dosazením za x do druhé rovnice získáváme $(2 - |AB|)^2 + 1 = |AB|^2$. Odtud vychází $|AB| = 1,25$ dm.

Úloha 40 J / 30 S. V rovine je daných 100 různých mřížových bodů. Každé dva různé body spojíme úsečkou. Najmenej koľko z týchto úsečiek má stred v mriežovom bode?

Poznámka: bod v rovine nazývame *mriežový*, ak sú obe jeho súradnice celočíselné.

Výsledok. $1200 = 4 \cdot \binom{25}{2}$.

Návod. Souřadnice středu spojnice dvou mřížových bodů určíme jako průměr souřadnic těchto bodů. Všimneme si, že střed je opět mřížový bod právě tehdy, když mají vodorovné i svislé souřadnice obou bodů stejnou paritu. Všechny body se tedy podle parity souřadnic rozdělí do čtyř skupin (sudá-sudá, sudá-lichá, lichá-sudá, lichá-lichá), přičemž v každé skupině budou mít všechny spojnice za svůj střed mřížový bod a žádná spojnice bodů z různých skupin tuto vlastnost mít nebude. Aby byl počet úseček se středem v mřížovém bodě minimální, musí být všechny čtyři skupinky stejně velké. Rozmyslete si, že kdyby nebyly, tak přesunutím jednoho bodu z nejméně početné skupiny do nejméně početné skupiny bychom počet takových úseček snížili. Počet spojnic v jedné skupince je tudíž $\binom{25}{2}$ a celkem tedy bude úseček se středem v mřížovém bodě $4 \cdot \binom{25}{2}$.

Úloha 41 J / 31 S. Päťciferné číslo nazveme *nerozložiteľné*, ak sa nedá napísať ako súčin dvoch trojčiferných čísel. Najviac koľko nerozložiteľných čísel môže nasledovať bezprostredne za sebou?

Výsledok. 99.

Návod. Všimneme si, že čísla $100 \cdot 100 = 10000$ a $100 \cdot 101 = 10100$ jsou dvě nejmenší rozkládací pěticiferná čísla. Tedy 10001, 10002, ..., 10099 tvoří posloupnost 99 po sobě jdoucích nerozkládacích čísel. Více než 99 nerozkládacích čísel za sebou následovat nemůže, neboť mezi každými 100 po sobě jdoucími čísly najdeme jedno rozkládací, které je dělitelné 100.

Úloha 42 J / 32 S. Reálne čísla x a y spĺňajú $(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 14^2$. Nájdite minimálnu hodnotu výrazu $x^2 + y^2$.

Výsledok. 1.

Návod. Výrazy budeme interpretovať geometricky. V rovine s počátkem souřadnic O je množina bodů splňujících $(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 14^2$ kružnice k se středem $S[-5, 12]$ a poloměrem 14. Bod O leží uvnitř kružnice k . Výraz $x^2 + y^2$ je druhou mocninou vzdálenosti od počátku, tj. hledáme bod na kružnici k , který je nejbližší počátku. Takovým bodem je průsečík P přímky SO s kružnicí k , jehož vzdálenost od počátku je $|SP| - |SO| = 14 - \sqrt{5^2 + 12^2} = 14 - 13 = 1$.

Úloha 43 J / 33 S. Postupnosť vytvárame postupne pomocou vzorca

$$a_{n+2} = a_n - \frac{1}{a_{n+1}},$$

kým má pravá strana zmysel (tj. nedelí sa nulou). Navyše vieme, že $a_1 = 20$ a $a_2 = 11$. Určte najmenšie t také, že $a_t = 0$.

Výsledok. 222.

Návod. Dokud má pravá strana zmysel, môžeme zadanú podmítku roznásobiť a upraviť na

$$a_{n+2}a_{n+1} = a_{n+1}a_n - 1.$$

Vidíme, že $a_1a_2 = 220$, $a_2a_3 = 219$, ..., $a_{220}a_{221} = 1$, $a_{221}a_{222} = 0$, a preto $t = 222$.

Úloha 44 J / 34 S. Je daný ostrouhlý trojuholník ABC s výškami AA' , BB' , CC' , ktoré sa pretínajú v bode H . Navyše platí

$$\frac{|AH|}{|HA'|} = 1, \quad \frac{|BH|}{|HB'|} = 2.$$

Určte $|CH|/|HC'|$.

Výsledok. 5.

Návod. Hranatými zátvorkami budeme značiť obsah trojuholníku. Potom platí $[ABC] = [ABH] + [ACH] + [BCH]$. Pretože trojuholníky ABC a ABH majú spoločnú stranu AB , je pomer jejich obsahů roven poměru jejich výšek na stranu AB . Použijeme-li podobný argument rovněž pro trojuholníky ACH a BCH , dostaneme

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{[ABH] + [ACH] + [BCH]}{[ABC]} = \\ &= \frac{|C'H|}{|C'H| + |CH|} + \frac{|B'H|}{|B'H| + |BH|} + \frac{|A'H|}{|A'H| + |AH|} = \frac{|C'H|}{|C'H| + |CH|} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{tedy } \frac{|C'H|}{|C'H| + |CH|} = \frac{1}{6} \text{ a } \frac{|CH|}{|HC'|} = \frac{|C'H| + |CH|}{|C'H|} - 1 = 5.$$

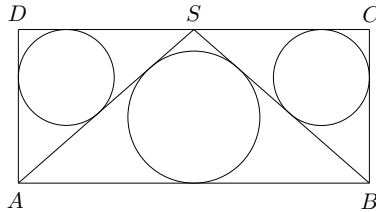
Úloha 45 J / 35 S. Na oslave každý (vrátane Ondra) pozná práve sedem chlapcov a presne desať dievčat. Známosti sú vzájomné a nikto nepozná sám seba. Koľko najmenej ľudí mohlo byť na oslave?

Výsledok. 34.

Návod. Označme počet chlapců c a počet dívek d . Znáni se mezi chlapci a dívkami je vzájemně, tedy sečteme-li přes všechny dívky chlapce, které znají, dostaneme totéž jako když sečteme přes všechny chlapce dívky, které znají. Máme tak $7d = 10c$, z toho vidíme, že počet chlapců je přímo úměrný počtu dívek (stačí tedy minimalizovat počet dívek) a že počet dívek musí být dělitelný deseti. Každá dívka zná deset dívek, tedy $d \geq 11$, nejmenší možný počet dívek tak je 20, chlapců pak je 14. A takovou situaci umíme sestrojít, např. následovně:

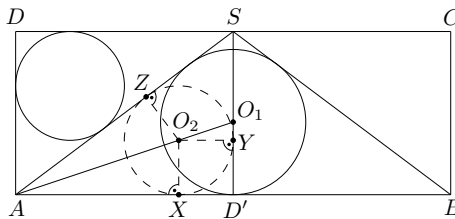
- Rozdělíme společnost do dvou skupinek po 10 dívkách a 7 chlapcích. V každé skupince seznámíme každého chlapce s každou dívkou.
- Postavíme dívky do kolečka. Pak každou seznámíme s deseti najbližšími.
- Postavíme chlapce do kolečka. Pak každého seznámíme s šesti najbližšími a ďalej s chlapcem naproti.

Úloha 46 J / 36 S. Bod S je stredom strany CD obdĺžnika $ABCD$. Obe kružnice vpísané trojuholníkom ASD a BSC majú polomer 3 a kružnica vpísaná trojuholníku ASB má polomer 4. Určte veľkosti strán obdĺžnika.



Výsledok. 9, 24.

Návod.



Označme body D' , O_1 , O_2 , X , Y , Z jako na obrázku a $|AD| = a$, $|DS| = b$. Potom je $\triangle ADS \cong \triangle SD'A$, takže poloměr kružnice vpísané trojúhelníku $SD'A$ je 3. Navíc je tato kružnice vepsána úhlu SAB , takže její střed O_2 leží na přímce AO_1 . Z podobnosti trojúhelníků $\triangle AO_1D' \cong \triangle AO_2X$ (věta uu) máme $\frac{4}{b} = \frac{|O_1D'|}{|D'A|} = \frac{|O_2X|}{|XA|} = \frac{3}{b-3}$, tj. $b = 12$.

Protože úseky tečen jsou shodné, platí $|SZ| = |SY| = a - 3$ a $|AZ| = |AX| = 12 - 3$. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník $SD'A$ dostaneme druhou rovnici $(a + 6)^2 = |AS|^2 = a^2 + 12^2$, odkud $a = 9$, takže strany obdélíku jsou 9 a 24.

Úloha 47 J / 37 S. Kladných delitelov prirodzeného čísla n menších od n si napíšeme od najväčšieho po najmenšieho. Ak je súčet druhého a tretieho napísaného čísla rovný prvému napísanému číslu, tak číslo n nazveme *sčítacie*. Koľko existuje sčítacích čísel menších ako 15000?

Výsledok. 1000.

Návod. Vezmeme číslo n a zistíme, čo po ňom požadujeme, aby bolo *sčítací*. Pokiaľ by bolo liché, mělo by všetky delitele liché. Ale to by pak součet dvou lichých čísel musel být liché číslo, což nejde. Číslo n je tedy sudé.

Všetchny vypsané delitele podělíme n . Tak získáme převrácené hodnoty všech delitelů setříděných vzestupně, tentokrát kromě jedničky. Potřebujeme, aby součet převrácené hodnoty druhého a třetího nejmenšího delitele dával jednu polovinu. Sčítance musí být různé, takže jeden z nich musí být větší než $\frac{1}{4}$. Víme tak, že druhý nejmenší delitel musí být roven třem. Třetí pak vyjde šest.

Tedy číslo n je „sčítací“ právě tehdy, když jeho delitelé jsou vzestupně 1, 2, 3, 6, ... neboli když je dělitelné šesti, ale ne čtyřmi ani pěti. Vydělíme všechna taková čísla z rozmezí 1 až 15000 šesti a dostáváme všechna lichá čísla nedělitelná pěti v rozmezí 1 až 2500. Číslo je liché a nedělitelné pěti, pokud končí na jednu z cifer 1, 3, 7, 9. Mezi každými deseti po sobě jdoucími čísly jsou taková čísla 4. To máme $2500 \cdot \frac{4}{10} = 1000$ sčítacích čísel.

Úloha 48 J / 38 S. Nájďte všetky reálne čísla x spĺňajúce vzťah

$$\frac{x-49}{50} + \frac{x-50}{49} = \frac{50}{x-49} + \frac{49}{x-50}.$$

Výsledok. 99, 0, $\frac{4901}{99} = 49\frac{50}{99}$.

Návod. Označme $a = \frac{x-49}{50}$ a $b = \frac{x-50}{49}$. Pak lze rovnici přepsat jako $a + b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Po roznásobení a rozkladu na součin získáme ekvivalentní rovnici $(a+b)(ab-1) = 0$, takže stačí rozlišit dva případy. Rovnice $a = -b$ je lineární vzhledem k x s řešením $x = \frac{4901}{99}$. Rovnice $ab = 1$ je kvadratická vzhledem k x s kořeny $x = 0$ a $x = 99$.

Úloha 49 J / 39 S. Umiestnenie hodinovej a minútovej ručičky na ciferníku nazývame *korektné*, ak vyjadruje skutočný čas v priebehu dňa. Zistíte, koľko existuje takých korektných umiestnení, ktoré zostanú korektné aj po zámene ručičiek.

Výsledok. 143.

Návod. Označme h , resp. m úhly mērené ve stupních ($0 \leq h, m < 360$), které svírají hodinová, resp. minutová ručička se spojnici středu a dvanáctky. Uvědomíme si, že umístění ručiček je platné, právě když existuje celé a takové, že

$$m = 12h - 360a.$$

Aby umístění ručiček zůstalo platné i po jejich prohození, musí existovat celé b takové, že

$$h = 12m - 360b.$$

Dosazením první rovnice do druhé dostáváme

$$h = 144h - 360(12a + b)$$

a jednoduchou úpravou

$$h = \frac{360b'}{143},$$

kde $b' = 12a + b$ je rovněž celočíselné. Poslední rovnice má pro h z intervalu $(0, 360)$ právě 143 řešení, která nalezneme pro $b' = 0, 1, \dots, 142$. A protože pro každé h dostáváme z první rovnice jednoznačně určené m z intervalu $(0, 360)$, existuje právě 143 hledaných dvojic (h, m) .

Úloha 50 J / 40 S. Nech a, b, c sú také nenulové reálne čísla, že kvadratické trojčleny $ax^2 + bx + c$ a $bx^2 + cx + a$ majú spoločný koreň. Určte, aké hodnoty môže tento spoločný koreň nadobúdať.

Výsledok. 1.

Návod. Označme t společný koreň kvadratických trojčlenů. Pak $0 = at^2 + bt + c$ a $0 = bt^2 + ct + a$, takže i $0 = t \cdot (at^2 + bt + c) - (bt^2 + ct + a) = a(t^3 - 1)$. Jelikož $a \neq 0$, musí být $t = 1$. Volbou $a = -2, b = 1, c = 1$ zjištujeme, že jednička také společným koreňem být může.

Úloha 51 J / 41 S. Nájďte všetky celé čísla n také, že obe čísla $16n + 9$ a $9n + 16$ sú druhými mocninami nejakých prirodzených čísel.

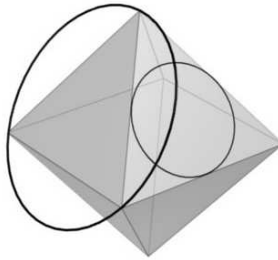
Výsledok. 0, 1, 52.

Návod. Má-li n má požadovanou vlastnost, pak jsou druhými mocninami i čísla

$$9 \cdot (16n + 9), \quad 16 \cdot (9n + 16).$$

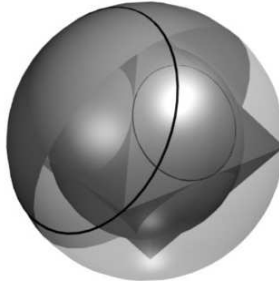
Hledejme tedy dvě druhé mocniny, které se liší o $16 \cdot 16 - 9 \cdot 9 = 175$. Pro přirozená $k > l$ řešíme rovnici $k^2 - l^2 = (k - l)(k + l) = 175 = 5^2 \cdot 7$ a postupně vyzkoušíme možné rozklady čísla 175. Řešení (88, 87), (20, 15), (16, 9) postupně odpovídají hodnotám $n = 52, 1, 0$, které jsou skutečně řešením.

Úloha 52 J / 42 S. Je daný pravidelný osemsten s hranou délky 2. Jednej jeho stene vpišeme kružnici a stene s ňou susediacej kružnicu opišeme. Aká je najmenšia vzdialenosť medzi týmito dvoma kružnicami?



Výsledok. $\sqrt{2} - 1 = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$.

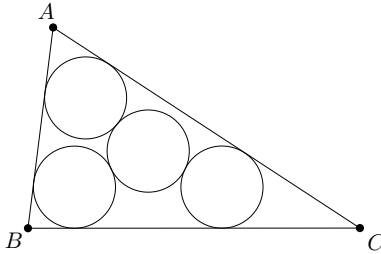
Návod. Prikreslíme si do obrázku dvě sféry. Jednu osmistěnu opišeme a druhou vepíšeme jeho hranám. Celá opsaná kružnice tak leží na opsané sféře a celá vepsaná kružnice na vepsané sféře.



Nejmenší vzdálenost kružnic tak určitě nebude menší než nejmenší vzdálenost sfér. Nejmenší vzdálenost soustředných sfér je rovna rozdílu jejich poloměrů, tedy $\sqrt{2} - 1$.

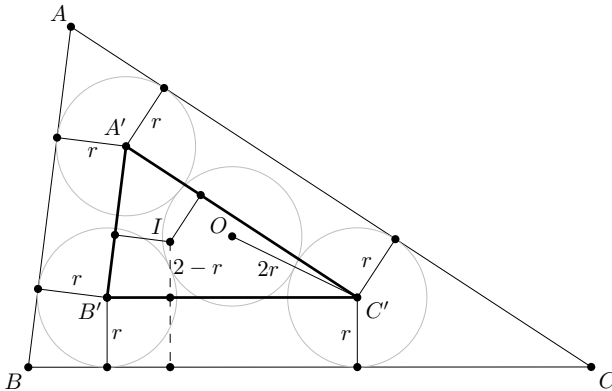
Zbývá si uvědomit, že této vzdálenosti se skutečně nabývá. To nastane, pokud existuje polopřímka s počátkem ve středu osmistěny, která prochází oběma kružnicemi. Můžeme snadno najít polopřímku protínající vepsanou kružnici, která vede vnitřkem opsané kružnice, i takovou, která opsanou zvenku míjí. Bude tedy existovat i taková polopřímka, co opsanou kružnici protíná.

Úloha 53 J / 43 S. Je daný trojuholník ABC s polomerom opísanej kružnice 5 a polomerom vpísanej kružnice 2. Vnútri trojuholníka sú do uhlov BAC , CBA , ACB vpísané zhodné kružnice s polomerom r tak, že existuje ďalšia kružnica s polomerom r , ktorá má so všetkými z nich vonkajší dotyk. Určte r .



Výsledok. $\frac{10}{9}$.

Návod.



Označme postupne A' , B' , C' stredy kružnic vepsaných do uhľov BAC , CBA , ACB , O stred kružnice čtvrté a I stred kružnice vepsané trojuholníku ABC . Trojuholníky ABC a $A'B'C'$ majú rovnobežné odpovídající si strany, takže jsou si podobné. Vyjádřeme poloměry kružnice vepsané a opsané trojuholníku $A'B'C'$ pomocí r .

Bod I má z rovnobežnosti od všech stran trojuholníka $A'B'C'$ vzdálenost $2-r$, proto je středem kružnice jemu vepsané a tato má poloměr právě $2-r$. Podobně má bod O díky dotykům kružnic od všech vrcholů trojuholníka $A'B'C'$ vzdálenost $r+r=2r$, takže je středem kružnice jemu opsané a tato má poloměr právě $2r$. Využitím podobnosti trojuholníků ABC a $A'B'C'$ tak máme

$$\frac{2-r}{2r} = \frac{2}{5},$$

což dává $r = \frac{10}{9}$.

Úloha 54 J / 44 S. Pre reálne čísla a, b, x, y platí

$$\begin{aligned} ax + by &= 3, \\ ax^2 + by^2 &= 7, \\ ax^3 + by^3 &= 16, \\ ax^4 + by^4 &= 42. \end{aligned}$$

Určte hodnotu $ax^5 + by^5$.

Výsledok. 20.

Návod. Rozmyslíme si, že pro každé přirozené n platí

$$(ax^n + by^n)(x + y) = (ax^{n+1} + by^{n+1}) + xy(ax^{n-1} + by^{n-1}).$$

Označme $t = x + y$, $s = xy$ a dosadíme do předchozího vztahu postupně $n = 2, 3$. Dostaneme tak soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 7t &= 16 + 3s, \\ 16t &= 42 + 7s. \end{aligned}$$

Řešením soustavy jsou $t = -14$, $s = -38$. Nakonec stačí do prvního vztahu dosadit $n = 4$, čímž dostaneme $42 \cdot (-14) = ax^5 + by^5 - 38 \cdot 16$ a dopočteme $ax^5 + by^5 = 20$.