

Úloha 1. Ak zväčšíte číslo úlohy, ktorú práve držíte v ruke o číslo n , získate číslo úlohy s najviac šokujúcim zadáním. Ak ho ale zväčšíte o dvojciferné číslo k , získate číslo najhravejšej úlohy. Navyiac platí, že $n^3 = k^2$. Určte n a k , ak viete, že vám zostáva ešte 44 úloh (vrátane tejto).

Úloha 2. Nájdite prirodzené číslo n spĺňajúce vzťah $6666^2 + 8888^2 = n^2$.

Úloha 3. Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktorého desiatkový zápis končí na 17, je deliteľné 17-timi a má ciferný súčet 17.

Úloha 4. Každá dvojica po sebe idúcich cifier istého 2011-ciferného čísla je násobkom 17 alebo 23. Jeho posledná cifra je 1. Určte jeho prvú cifru.

Úloha 5. Prirodzené číslo nazveme *luxusné*, ak každé iné číslo s rovnakým ciferným súčtom je od neho väčšie. Zistite, koľko je trojciferných luxusných čísel.

Úloha 6. Škrečkove reálne čísla x, y, z spĺňajú $(x - y)/(z - y) = -10$. Aké hodnoty môže nadobúdať výraz $(x - z)/(y - z)$? Nájdite všetky možnosti.

Úloha 7. Čísllice 1, 2, ..., 9 napíšeme za sebou v nejakom poradí tak, aby vzniklo deväťciferné číslo. Uvažujme všetky trojice po sebe idúcich cifier tohto čísla a k týmto trojiciam zodpovedajúce trojciferné čísla sčítame. Aký najväčší výsledok môžeme dostať?

Úloha 8. V každom políčku tabuľky 10×10 je napísané číslo. Filip si vybral dve čísla z tabuľky a do zošita si napísal ich súčin. Toto spravil pre všetky dvojice čísel z tabuľky. Všimol si, že práve 1000 z týchto súčinov je záporných. Koľko z pôvodných čísel mohlo byť rovných nule? Vypíšte všetky možnosti.

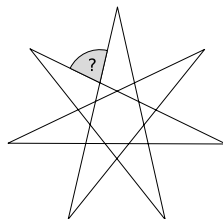
Úloha 9. V istom kráľovstve začali raziť mince. Počas prvého dňa razili mince v hodnote 1 fufeň. Každý ďalší deň razili mince v najmenšej hodnote, ktorá sa nedala zaplatiť pomocou maximálne desiatich už vyrazených mincí. Mince akej hodnoty razili počas 2011-teho dňa?

Úloha 10. Označme p riešenie úlohy na tomto papieri. Určte pravdepodobnosť (číslo z intervalu $(0, 1)$), že náhodne vybraný bod vnútri štvorca so stranou 1 cm je od všetkých jeho strán vzdialený aspoň p cm.

Úloha 11. Tabuľka 3×3 je vyplnená celými číslami. Súčty čísel v riadkoch zhora nadol stúpajú o 2 a súčty čísel v stĺpcoch zľava doprava sa zdvojnásobujú. Ak je súčet jedného z riadkov 2011, tak aký je súčet čísel v ľavom stĺpci?

Úloha 12. Dva trajekty vyplávali naraz proti sebe cez zátoku. Oba plávali po priamke konštantnou, ale rozdielnou rýchlosťou. Prvýkrát sa stretli vo vzdialenosti 100 m od jedného brehu. Keď každý z nich doplával k protiláhlému brehu, ihneď sa otočil a plával rovnakou cestou naspäť. Na spätočnej ceste sa stretli trajekty vo vzdialenosti 70 m od druhého brehu. Aká široká je zátoka?

Úloha 13. Vrcholy hviezdy na obrázku tvoria pravidelný sedemuholník. Aká je veľkosť vyznačeného uhla?



Úloha 14. Nájdite x spĺňajúce vzťah $2^{2^{3^{2^2}}} = 4^{4^x}$.

Poznámka: poschodové mocniny sa vyhodnocujú zhora, tj. $4^{3^2} = 4^9$.

Úloha 15. Zistite počet usporiadaných trojíc prirodzených čísel (a, b, c) takých, že $a + b + c \leq 30$ a

$$\frac{\frac{a}{c} + \frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + \frac{b}{c} + 1} = 11$$

Úloha 16. V rovine je daná kružnica s polomerom 1, stredom O a priemerom AC . Označme p kolmicu na priemer AC prechádzajúcu bodom O . Zvolíme bod U na priamke p mimo kružnice taký, že ak označíme druhý priesečník kružnice s priamkou AU ako B , tak platí $|BU| = 1$. Určte dĺžku úsečky OU .

Úloha 17. Bitky dvoch armád A a B sa zúčastnilo dokopy 1000 vojakov. Armády strieľali v salvách. V každej salve zastrelil každý vojak jedného vojaka z nepriateľskej armády (ak je to možné, tak každý iného). V tejto bitke strieľala najprv armáda A , potom armáda B a nakoniec armáda A . Najmenej koľko vojakov bitku určite prežilo?

Úloha 18. Všetkých šesť strán konvexného šesťuholníka $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ je zafarbených na červeno. Každú z uhlopriečok zafarbíme buď na červeno, alebo na modro. Koľko je zafarbení takých, že každý trojuholník $A_iA_jA_k$ ($i \neq j \neq k \neq i$) má aspoň jednu zo svojich strán zafarbenú na červeno?

Úloha 19. Petržlen najskôr povedal jedno prirodzené číslo Škrečkovi a jedno prirodzené číslo Jefovi. Potom im povedal, že ich čísla sú rôzne a súčet ich čísel je dvojčíferné číslo. Následne sa začali Škrečok s Jefom rozprávať:

Škrečok: „Neviem povedať, kto z nás má väčšie číslo.“

Jefo: „Ani ja, ale prezradím, že moje číslo je deliteľné 17–mi.“

Škrečok: „Aha!, tak ja už teraz viem aký je súčet našich čísel.“

Čomu sa rovná tento súčet, ak obaja uvažovali bezchybne?

Úloha 20. V kaviarni sú Indovia a Turci a dohromady je ich 55. Každý z nich pije buď kávu alebo čaj. Ind je pravdovravný práve vtedy, keď pije čaj. Turek je pravdovravný práve vtedy, keď pije kávu. Na otázky: „Pijete kávu?“, „Ste Turek?“ a „Prší vonku?“ boli počty kladných odpovedí postupne 44, 33 a 22 (každý odpovedal práve raz). Koľko Indov pije čaj? Nájdite všetky možnosti.

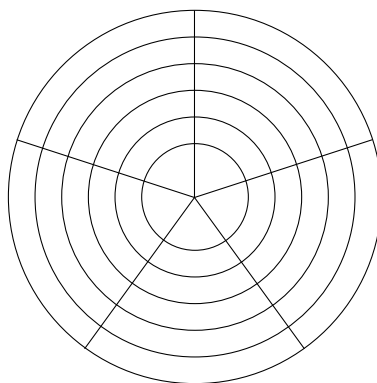
Úloha 21. Za pravý koniec prirodzeného čísla A v desiatkovom zápise boli dopísané tri cifry, čím vzniklo číslo, ktoré je súčtom všetkých prirodzených čísel od 1 po A vrátane. Zistite všetky možné hodnoty čísla A .

Úloha 22. Amanda, Bohumila, Celestína, Dobroslava a Etelka hrajú turnaj v štvorhre v stolnom tenise. Každá dvojica hrala proti každej inej dvojici práve raz. Amanda vyhrala dokopy 12 zápasov a Bohumila ich vyhrala 6. Koľko zápasov mohla vyhrať Celestína? Nájdite všetky možnosti.

Úloha 23. Dvaja hráči hrajú na uvedenom pláne pozostávajúceho z 30 políčok hru podľa nasledujúcich pravidiel:

- hráči sa striedajú v ťahoch,
- ťahom rozumieme vyfarbenie práve jedného políčka,
- v prvom ťahu sa vyfarbí políčko susediace s vonkajškom terčom a v každom ďalšom ťahu sa vyfarbí políčko, ktoré susedí s posledným vyfarbeným políčkom a nie je ďalej od stredu,
- vyfarbené políčko sa nesmie znovu vyfarbovať,
- kto nemôže potiahnuť, prehral.

Koľko políčok bude vyfarbených na konci hry, v ktorej obaja hráči hrajú bezchybne a ten, kto nemôže vyhrať, sa snaží hru čo najviac predĺžovať?



Úloha 24. V trojuholníku ABC platí $|AC| = |BC|$. Vo vnútri strany AB bližšie k bodu B určíme bod P tak, aby $|\sphericalangle ACP| = 30^\circ$. Ďalej určíme bod Q tak, aby $|\sphericalangle CPQ| = 78^\circ$ a aby body C a Q ležali v opačných polrovinách určených priamkou AB . Vieme, že všetky uhly v trojuholníkoch ABC a PQB sú vyjadrené celočíselne v stupňoch. Zistíte, aké hodnoty môže nadobúdať uhol BQP .

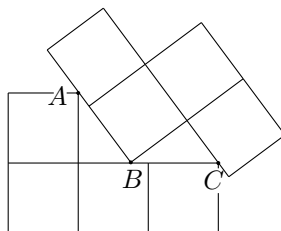
Úloha 25. Desať ľudí sedelo za radom vedľa seba v divadle. Po prestávke si sadli tak, že práve dvaja z nich zostali na svojich pôvodných miestach a zvyšných osem sa posadilo na stoličku jedného zo susedov. Koľkými spôsobmi to mohli urobiť?

Úloha 26. Na každej stene kocky je napísané prirodzené číslo. Každému vrcholu kocky priradíme súčin čísel napísaných na troch príľahlých stenách. Vieme, že súčet čísel priradených vrcholom je 165. Aké hodnoty môže nadobúdať súčet čísel na stenách?

Úloha 27. Dvaja cyklisti pretekali na rovnej ulici v cestnom maratóne. Štartovali spoločne v rovnaký čas a z rovnakého konca ulice. Ak ľubovoľný z nich dorazil na ľubovoľný koniec ulice, tak sa otočil a išiel späť. Do okamihu, kým sa obaja zase stretli na jednom z koncov ulice, prešiel prvý z nich ulicu 47-krát a druhý 35-krát. Koľkokrát sa počas tejto doby čelne minuli?

Úloha 28. Nájdite najväčšie prirodzené číslo také, že všetky cifry okrem prvej a poslednej sú menšie ako aritmetický priemer susedných dvoch cifier.

Úloha 29. Dve tetrisové kocky zostavené zo štvorcov o rozmeroch 1×1 dm sa dotýkajú v bodoch A , B , C ako na obrázku. Určte vzdialenosť $|AB|$.



Úloha 30. V rovine je daných 100 rôznych mrežových bodov. Každé dva rôzne body spojíme úsečkou. Najmenej koľko z týchto úsečiek má stred v mrežovom bode?

Poznámka: bod v rovine nazývame *mrežový*, ak sú obe jeho súradnice celočíselné.

Úloha 31. Päťciferné číslo nazveme *nerozložiteľné*, ak sa nedá napísať ako súčin dvoch trojčiferných čísel. Najviac koľko nerozložiteľných čísel môže nasledovať bezprostredne za sebou?

Úloha 32. Reálne čísla x a y spĺňajú $(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 14^2$. Nájdite minimálnu hodnotu výrazu $x^2 + y^2$.

Úloha 33. Postupnosť vytvárame postupne pomocou vzorca

$$a_{n+2} = a_n - \frac{1}{a_{n+1}},$$

kým má pravá strana zmysel (tj. nedelí sa nulou). Navyše vieme, že $a_1 = 20$ a $a_2 = 11$. Určte najmenšie t také, že $a_t = 0$.

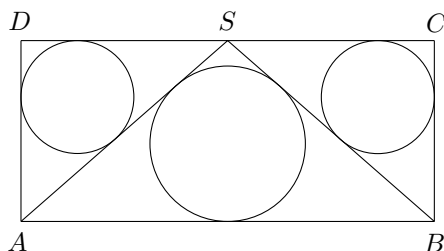
Úloha 34. Je daný ostrouhlý trojuholník ABC s výškami AA' , BB' , CC' , ktoré sa pretínajú v bode H . Navyše platí

$$\frac{|AH|}{|HA'|} = 1, \quad \frac{|BH|}{|HB'|} = 2.$$

Určte $|CH|/|HC'|$.

Úloha 35. Na oslave každý (vrátane Ondra) pozná práve sedem chlapcov a presne desať dievčat. Známosti sú vzájomné a nikto nepozná sám seba. Koľko najmenej ľudí mohlo byť na oslave?

Úloha 36. Bod S je stredom strany CD obdĺžnika $ABCD$. Obe kružnice vpísané trojuholníkom ASD a BSC majú polomer 3 a kružnica vpísaná trojuholníku ASB má polomer 4. Určte veľkosti strán obdĺžnika.



Úloha 37. Kladných deliteľov prirodzeného čísla n menších od n si napíšeme od najväčšieho po najmenšieho. Ak je súčet druhého a tretieho napísaného čísla rovný prvému napísanému číslu, tak číslo n nazveme *sčítacie*. Koľko existuje sčítacích čísel menších ako 15000?

Úloha 38. Nájdite všetky reálne čísla x spĺňajúce vzťah

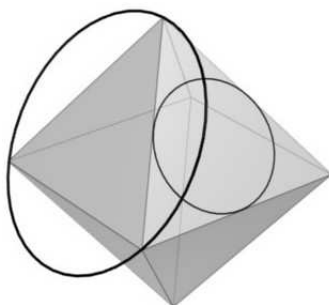
$$\frac{x-49}{50} + \frac{x-50}{49} = \frac{50}{x-49} + \frac{49}{x-50}.$$

Úloha 39. Umiestnenie hodinovej a minútovej ručičky na ciferníku nazývame *korektné*, ak vyjadruje skutočný čas v priebehu dňa. Zistite, koľko existuje takých korektných umiestnení, ktoré zostanú korektné aj po zámene ručičiek.

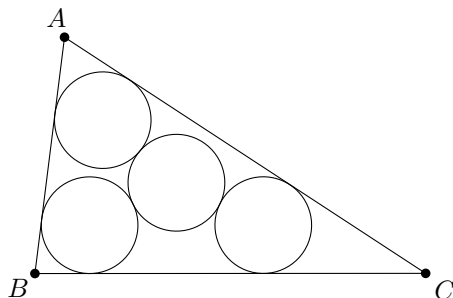
Úloha 40. Nech a, b, c sú také nenulové reálne čísla, že kvadratické trojčleny $ax^2 + bx + c$ a $bx^2 + cx + a$ majú spoločný koreň. Určte, aké hodnoty môže tento spoločný koreň nadobúdať.

Úloha 41. Nájdite všetky celé čísla n také, že obe čísla $16n + 9$ a $9n + 16$ sú druhými mocninami nejakých prirodzených čísel.

Úloha 42. Je daný pravidelný osemsten s hranou dĺžky 2. Jednej jeho stene vpíšeme kružnicu a stene s ňou susediacej kružnicu opíšeme. Aká je najmenšia vzdialenosť medzi týmito dvoma kružnicami?



Úloha 43. Je daný trojuholník ABC s polomerom opísanej kružnice 5 a polomerom vpísanej kružnice 2. Vnútri trojuholníka sú do uhlov BAC, CBA, ACB vpísané zhodné kružnice s polomerom r tak, že existuje ďalšia kružnica s polomerom r , ktorá má so všetkými z nich vonkajší dotyk. Určte r .



Úloha 44. Pre reálne čísla a, b, x, y platí

$$\begin{aligned}ax + by &= 3, \\ax^2 + by^2 &= 7, \\ax^3 + by^3 &= 16, \\ax^4 + by^4 &= 42.\end{aligned}$$

Určte hodnotu $ax^5 + by^5$.