

**Zadania 1. série letnej časti KMS 2011/2012****Kategória ALFA**Úloha č. 1:

Gyro Vynálezca kopíruje v počítači  $n$  rovnako veľkých súborov. Počítač mu zobrazuje dva progress bary<sup>1</sup>. Horný ukazuje, koľko percent zo všetkých dát je už skopírovaných. Spodný ukazuje, koľko percent z práve kopírovaného súboru je už skopírovaných. Na začiatku sú oba progress bary na 0%. Kolkokrát sa počas celého kopírovania stane, že budú oba progress bary ukazovať rovnako veľa percent a na koľkých percentách to bude?

Úloha č. 2:

Snehulienka si myslí prvočíslo  $p > 7$ . Trpaslíci tvrdia, že  $p^2 - 1$  je deliteľné číslom 24. Dokážte, že majú pravdu.

Úloha č. 3:

Vlk slúbil Červenej Čiapočke, že ju nezozerie, ak dokáže, že pre ľubovoľné dve reálne čísla  $a$  a  $b$  platí

$$(a^2 + b^2)^3 \geq (a^3 + b^3)^2.$$

Zachráňte Červenú Čiapočku a dokážte túto nerovnosť.

Úloha č. 4:

Morská panna hrá na pláži hru, ktorej cieľom je prepísať  $MI$  na  $MU$ . Na začiatku hry má v piesku napísané slovo  $MI$ . So slovom, ktoré je napísané v piesku, potom môže robiť nasledujúce úkony:

- i) ak sa slovo končí na  $I$ , môže na koniec pridať  $U$ ,
- ii) ak sú v slove tri  $I$  za sebou, môže ich nahradiť za  $U$ ,
- iii) slovo  $Mx$ , kde  $x$  je akákoľvek postupnosť písmen, môže nahradiť za  $Mxx$ ,
- iv) dve  $U$  za sebou môže zmazať.

Je možné, aby po konečnom počte úkonov ostalo v piesku napísané  $MU$ ? Ak áno, ako? Ak nie, vysvetlite prečo.

Úloha č. 5:

Nech  $x, y, z, a, b, c$  sú reálne čísla a zároveň  $a, b, c$  sú nenulové. Ďalej nech

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \quad a + b + c = 1 \quad \text{a} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Dokážte, že  $xy + yz + zx = 0$ .

Úloha č. 6:

Popolvár najväčší na svete sa opäť raz hrá sám v humne na sene. Má mriežku veľkosti  $2 \times n$  a čísla  $1, 2, \dots, 2n$ . Koľkými spôsobmi môže vyplniť mriežku číslami tak, aby každé číslo  $k$ , okrem  $1$  a  $2n$ , susedilo jednou stranou s  $k - 1$  a ďalšou stranou s  $k + 1$ ? Na jedno políčko mriežky ide jedno číslo.

Úloha č. 7:

Okolo tábora sa posadilo 2011 dievčat a 2012 chlapcov. Každú hodinu sa medzi dvoch ľudí rovnakého pohlavia posadilo dievča, medzi dvoch ľudí rôzneho pohlavia sa posadil chlapec a pôvodné osadenstvo tábora sa išlo hrať do lesa, takže okolo tábora bolo vždy práve 4013 ľudí. Dokážte, že po konečnom počte hodín nemôžu zostať okolo tábora samé dievčatá.

**Kategória BETA**

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:

O prirodzenom čísle<sup>2</sup>  $n$  vieme, že čísla  $2n + 1$  a  $3n + 1$  sú štvorcami celých čísel. Môže byť potom číslo  $5n + 3$  prvočíslom?

<sup>1</sup>indikátor, ktorý ukazuje, koľko percent súboru je skopírovaného

<sup>2</sup>Nulu nepovažujeme za prirodzené číslo.

Úloha č. 9:

Hago má doma kocku s dĺžkou hrany 3, ktorá je rozdelená na 27 rovnakých malých kociek s dĺžkami hrán 1. Hago každé z čísel  $1, 2, \dots, 27$  priradil práve jednej malej kocke. Potom spočítal súčet týchto čísel pre každú trojicu kociek ležiacich na jednej priamke rovnobežnej s nejakou hranou kocky. Takto dostal 27 súčtov. Zistite, koľko najviac z týchto súčtov môže byť nepárnych.

Úloha č. 10:

CéDečka prestalo baviť skákať po nekonečnej šachovnici koňom, ktorý chodí klasicky do tvaru písmena  $L$ . Preto si vymyslel  $(a, b)$ -koňa, ktorý skáče o  $a$  políčok jedným smerom, o  $b$  políčok druhým smerom a postavil ho na svoju nekonečnú šachovnicu. Zistite, pre ktoré prirodzené čísla  $a$  a  $b$  sa jeho  $(a, b)$ -kôň vie dostať na vedľajšie políčko, susediace stranou so začiatočným políčkom, na menej ako  $a + b$  ťahov.

Úloha č. 11:

Petržlen je guvernérom štátu, kde medzi každými dvoma mestami existuje priame cestné spojenie, bez križovatiek s inými cestami. V štáte je  $n$  miest a platí sa mýto v cene  $x_{ij}$  za použitie cesty medzi mestami  $i$  a  $j$ . Cesta medzi dvoma mestami je oboma smermi rovnako drahá. Okružnou cestou nazveme postupnosť  $n$  ciest prechádzajúcich cez každé mesto práve raz. Petržlen chce byť spravodlivý, a preto nariadil zákon, ktorý každej okružnej ceste určuje v súčte rovnakú cenu. Dokážte, že potom existujú čísla  $a_1, a_2, \dots, a_n$  a  $b_1, b_2, \dots, b_n$  také, že pre každé  $i, j$  platí  $x_{ij} = a_i + b_j$ .

### Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov: Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh  
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.  
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese [kms.sk/kniznica](http://kms.sk/kniznica).

### Fórum o príkladoch

Pre nedeckavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese [kms.sk/forum](http://kms.sk/forum) a môžete na ňom čoskoro po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Kategória **ALFA, BETA**: Termín odoslania riešení je **5. marec 2012** (pre zahraničie 2. marec 2012).

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[kms.sk](http://kms.sk)

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.