

Zadania 2. série zimnej časti KMS 2007/2008**Kategória ALFA**Úloha č. 1:

Trojuholník ABC je rozdelený na dva trojuholníky ADC a BCD , ktoré sú rovnoramenné a majú rovnaký obsah. Veľkosť uhla ADC je 100° . Aká je veľkosť uhla ABC ?

Úloha č. 2:

Na zemi je nakreslená nekonečná štvorčeková sieť, pričom na jednom z políčok stojí kocka, ktorej stena je rovnako veľká ako toto políčko. Kocka je celá čierna, len vrchnú stenu má natretú nabiele. Kocku začneme kotúľať po šachovnici a chceme, aby sa vrátila na pôvodné miesto tak, že biela stena bude naspodku. Vieme to dosiahnuť presne po 2008 krokoch? A čo tak po 2007 krokoch?

Úloha č. 3:

Ondráč od svojho pobytu v Ostrave nemá pizzu Quattro Formaggi veľmi v láske. Povedal si však, že jej dá ešte šancu. Na celú si ale netrúfa, zobral preto so sebou aj Škrečka, ktorý vždy rád pomôže. Aby to nekomplikovali, rozhodli sa, že pizzu rozdelia dvoma priamymi na seba kolmými rezmí, z ktorých žiaden neprechádza stredom, na štyri časti a každý si vezme dva protilahlé kúsky. Škreček si vybral tie dva, z ktorých jeden obsahoval stred pizze. Dokážte, že získal väčšiu časť pizze.

Úloha č. 4:

Štvorciferné číslo n , ktoré neobsahuje vo svojom zápise v desiatkovej sústave číslicu 9, je druhou mocninou prirodzeného čísla. Keď zväčšíme každú jeho číslicu o 1, dostaneme opäť druhú mocninu prirodzeného čísla. Nájdite všetky štvorciferné čísla s touto vlastnosťou.

Úloha č. 5:

Nech r je polomer kružnice vpísanej pravouhlému trojuholníku ABC a h je výška na preponu AB . Táto výška delí trojuholník ABC na dva menšie trojuholníky. Nech r_1 a r_2 sú polomery kružníc vpísaných týmito trojuholníkmi. Dokážte, že platí

a) $r_1 + r_2 + r = h$,

b) $r_1^2 + r_2^2 = r^2$.

Úloha č. 6:

Každé prirodzené číslo je zafarbené buď červenou alebo zelenou farbou tak, že sú splnené nasledujúce podmienky:

1. Súčet troch červených (nie nutne rôznych) čísel je vždy červené číslo.
2. Súčet troch zelených (nie nutne rôznych) čísel je vždy zelené číslo.
3. Aspoň jedno číslo je zelené a aspoň jedno číslo je červené.

Nájdite všetky ofarbenia, ktoré spĺňajú tieto podmienky.

Úloha č. 7:

Dada má krúžok a na ňom n kľúčov ($n \geq 3$). Keď ho vyberie z vrečka, nevie, či sa jej náhodou nepootočil alebo neobrátil. Jediný spôsob, ako rozlíšiť kľúče, je zafarbiť ich (každý kľúč dostane jednu farbu). Aký je najmenší možný počet farieb, ktoré Dada potrebuje?

Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Pokúsme sa do roviny umiestniť $n \geq 3$ bodov tak, aby žiadne tri neležali na jednej priamke a aby medzi týmito n bodmi bolo čo najviac trojíc ktoré tvoria vrcholy rovnoramenného trojuholníka. Označme $f(n)$ najväčší možný počet rovnoramenných trojuholníkov ktorý takto vieme dosiahnuť s n bodmi. Dokážte, že existujú kladné reálne konštanty a, b také, že pre všetky $n \geq 3$ platí $an^2 < f(n) < bn^2$.

Úloha č. 9:

Máme ostrouhlý trojuholník ABC . Body B' , C' sú v tomto poradí súmerné s bodmi B , C v osovej súmernosti podľa priamok AC , AB . Kružnice opísané trojuholníkom ABB' a ACC' sa pretínajú v bodoch A a P . Dokážte, že priamka PA prechádza stredom O kružnice opísanej trojuholníku ABC .

Úloha č. 10:

Čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ spĺňajú vzťah $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m + r$, kde m je celé číslo a $r \in \langle 0, 1 \rangle$. Dokážte, že $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq m + r^2$.

Úloha č. 11:

Pre prirodzené čísla x a y platí $3x^2 + x = 4y^2 + y$.

- Dokážte, že $x - y$ je druhou mocninou prirodzeného čísla. (4 body)
- Dokážte, že zadaná rovnica má nekonečne veľa riešení. (4 body)
- Nájdite všetky riešenia tejto rovnice. (1 bod)

Kategória GAMA

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Pozor, nezabudni na zmenu termínu!

Úloha č. 12:

Nájdite prirodzené číslo n také, že číslo a) $n^2 - 1$, b) $n^2 - 4$ má presne 10 deliteľov.

Úloha č. 13:

Daný je trojuholník ABC so stredom vpísanej kružnice I . Osi vnútorných uhlov pri vrchoch A a C pretínajú kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bodoch A_0 a C_0 a úsečky BC a BA po rade v bodoch A_1 a C_1 . Predpokladajme, že sa priamky A_1C_1 a A_0C_0 pretínajú v bode P . Dokážte, že priamka PI je rovnobežná s priamkou AC .

Úloha č. 14:

Šachovnica 3000×3000 je rozdelená na dominové doštičky (teda obdĺžniky veľkosti 1×2). Dokážte, že vieme dominové doštičky ofarbiť tromi farbami tak, aby doštičiek jednotlivých farieb bolo rovnako veľa a aby žiadna doštička nemala viac ako dvoch susedov takej farby, akú má sama.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou www.kms.sk/archiv. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia všetkých príkladov, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto príkladov a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **29. októbra 2007** (pre zahraničie 26. októbra 2007).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **2. novembra 2007**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

www.kms.sk