

Zadania 3. série letnej časti KMS 2012/2013**Kategória ALFA**Úloha č. 1:

Hokejového turnaja sa zúčastnili štyri družstvá, pričom každé odohralo s každým práve jeden zápas. Počet gólov v každom zápase delí celkový počet gólov v turnaji. V žiadnych dvoch zápasoch nepadol rovnaký počet gólov. Nájdite najmenší možný počet gólov v turnaji.

Úloha č. 2:

Nájdite všetky prirodzené čísla, ktorých ciferný súčet je 7, sú deliteľné 7 a všetky cifry majú rôzne.

Úloha č. 3:

Vytvorte tri trojčiferné čísla, pričom použijete každú z cifier 1 až 9 práve raz, tak, aby ich pomer bol 1 : 3 : 5. Nájdite všetky riešenia.

Úloha č. 4:

Hago hrá nasledovnú verziu hry Kameň–papier–nožnice–jašterica–Spock:

- Kameň poráža nožnice a jaštericu.
- Papier poráža kameň a jaštericu.
- Nožnice porážajú papier a jaštericu.
- Jašterica poráža Spocka.
- Spock poráža kameň, papier a nožnice.

proti náhodne hrajúcemu počítaču. Ak vyhrá, dostane lentilku a ak prehrá, musí lentilku vyhodiť von oknom. Ako sa mu oplatí hrať, ak chce získať čo najviac lentiliiek?

Mojo si všimol ako to Haga baví a tak sa rozhodol pridať. Teraz hrá Hago proti náhodne hrajúcemu počítaču a náhodne hrajúcemu Mojovi (Mojo totiž nevie ako hrať). Teraz dostane Hago lentilku keď vyhrá s počítačom a ďalšiu keď vyhrá s Mojom. V prípade remízy nedostane žiadnu a ak prehrá musí jednu vyhodiť von oknom. Ako sa mu oplatí hrať teraz? A ak si môže vybrať, či bude hrať sto hier len s počítačom alebo aj s Mojom, čo je výhodnejšie? Koľko lentiliiek pri tom pravdepodobne vyhrá, ak bude hrať ideálne?

Úloha č. 5:

Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla m, n je číslo $4^m - 4^n$ deliteľné 9 práve vtedy, keď $m - n$ je deliteľné 3.

Úloha č. 6:

V štvorci 10×10 je zakreslených 101 bodov. Dokážte, že existuje trojuholník s obsahom 1, ktorý obsahuje aspoň tri z týchto bodov. Body môžu byť aj na obvode trojuholníka.

Úloha č. 7:

Sudička Morena darovala princeznej Horácii kopu čarovných kociek. Každá čarovná kocka mala každý z vrcholov očarovaný celým číslom. Navyše pre každú stenu čarovnej kocky platilo, že súčet čísel očarujúcich vrcholy tejto steny je nula. Horácia sa veľmi bála takej čarovnej kocky, na ktorej by našla štvoricu vrcholov spĺňajúcu nasledujúce dve vlastnosti:

- Vrcholy tvoria pravidelný štvorsten.
- Súčet čísel očarujúcich vrcholy je trinásť.

Pre dobro princeznej dokážte, že taká čarovná kocka neexistuje.

Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Princezná Horácia dostala od kráľovnej Gertrúdy úlohu vymyslieť dopravný systém hodný kráľovstva. Rýchly, bezpečný a jednoduchý. Gertrúda dala Horácii nasledovné podmienky:

- Medzi každými dvoma mestami bude priame spojenie buď drožkou, člnom alebo drakom. Vždy práve jedným.
- Budú použité všetky tri druhy dopravných prostriedkov.
- Zo žiadneho z miest sa nebude dať dostať všetkými tromi dopravnými prostriedkami.
- Cez žiadne tri mestá sa nebude dať dokola prejsť na jednom dopravnom prostriedku.

Horácia sa nadšene pustila do vymýšľania a podarilo sa jej vymyslieť systém spĺňajúci všetky kráľovnine požiadavky. Koľko miest môže mať kráľovstvo?

Úloha č. 9:

Princeznú Horáciu uniesol drak Gusto. Princezná Horácia začala v jeho jaskyni z nudy počítať, koľko je v celom kráľovstve melónov. Doma ich mala 9, sused ich mal 99, vo vedľajšej dedine ich bolo 9999. Horácia ale nevedela sčítavať, preto počty násobila a zisťovala ich ciferný súčet. Vyjadrite ciferný súčet čísla $9 \cdot 99 \cdot 9999 \dots (10^{2^n} - 1)$ v závislosti od n .

Úloha č. 10:

Princ Kleofáš sa vydal hľadať princeznú. Dvorania podľa vzoru princa začali hľadať tiež. Pomôžte im. Nájdite všetky usporiadané trojice (x, y, z) racionálnych čísel, ktoré spĺňajú rovnicu

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1.$$

Úloha č. 11:

Princ Kleofáš musel drakovi Gustovi odseknúť až šesťnásť z jeho sto hláv, kým to Gusta prestalo baviť a vrátil princeznú. Po návrate do mesta daroval Kleofáš tieto hlavy a polovicu princeznej vedeckému inštitútu Golem a Syn. Tí teraz chcú nájsť štyri hlavy, ktoré by tvorili vyrovnané tímy v zápase plážového hokejbalu. Dokážte, že medzi ľubovoľnými 16-timi rôznymi kladnými celými číslami neprevyšujúcimi 100, sa dajú nájsť štyri rôzne čísla a, b, c, d , pre ktoré platí $a + b = c + d$.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:

Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh

Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.

Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese kms.sk/kniznica.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese kms.sk/forum a môžete na ňom hneď po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Kategória **ALFA, BETA**: Termín odoslania riešení je **6. máj 2013** (pre zahraničie 3. máj 2013).

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

kms.sk

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.