

Zadania 3. kola letnej časti

Termín odoslania 20. 4. 2020 (pre zahraničie 17. 4. 2020)

3.1 Kontaminovaná-ish Marcelova Sušička ($\kappa \leq 1$)

kategória **alfa**

Marcel našiel doma legendárny prístroj menom sušička. Keďže nevedel čo s ňou, či je bezpečná a čo vôbec, tak nenechal nič na náhodu a rozhodol sa ju odnieť do FKS. Sušičku vložil do hermeticky uzavretej dekontaminačnej nádoby tvaru obdĺžnika $ABCD$.

Majme obdĺžnik $ABCD$ s rozmermi $|AB| = 12$ dm a $|BC| = 10$ dm. Vo vnútri obdĺžnika $ABCD$ ležia body E a F tak, že $|BE| = 9$ dm, $|DF| = 8$ dm a priamky BE a DF sú rovnobežné. Taktiež sú rovnobežné aj priamky EF a AB . Ďalej ešte vieme, že priamka BE pretína úsečku AD v jej vnútornom bode. Na to, aby Marcel nádobu otvoril, potrebuje od Teba niečo vedieť. Aká je dĺžka $|EF|$?

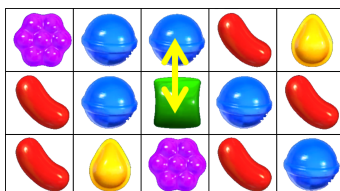
3.2 Kedy Marek Switchuje ($\kappa \leq 2$)

kategória **alfa**

Keď prišiel Marcel aj so svojou sušičkou do FKSka, tak si všimol Mareka hrajúceho sa s cukríkmi¹ nasledujúcu hru. Hra sa odohráva na pláne $m \times n$ štvorcových políčok, kde m, n sú celé čísla väčšie ako 1 a jedno z nich je aspoň 3. Na každom políčku sa nachádza cukrík práve jednej farby. V jednom ťahu môže Marek vymeniť cukríky na dvoch políčkach so spoločnou stranou, ale to len vtedy, ak sa po výmene budú vedľa seba nachádzať tri cukríky jednej farby v riadku alebo v stĺpci (ako na obrázku). Koľko najmenej farieb cukríkov potrebuje Marek na to, aby sa cukríky dali rozmiestniť do plánu tak, že:

- v žiadnom riadku ani v žiadnom stĺpci sa nenachádzajú za sebou tri cukríky rovnakej farby,
- nebolo možné spraviť žiaden ťah.

Výsledok určte v závislosti od čísel m, n .



3.3 Krutá Mocná Sušička ($\kappa \leq 3$)

kategória **alfa a beta**

Po tom, ako sa podarilo sušičku úspešne nastaviť, si FKSáci povedali, že takto výkonný stroj musia čo najskôr na niečom otestovať. Čo keby mala sušička príliš veľký výkon? Nemôžu si predsa zničiť svoje veci. Alebo ruky. Sušičku sa nakoniec rozhodli otestovať na najväčšom nepriateľovi FKS – rovnostrannom trojuholníku ABC . FKSáci si teda zobrali svoj kľúč od KMSka a nenápadne jeden ukradli. No a čo myslíte, že sa stalo, keď namierili naplno pustenú sušičku na rovnostranný trojuholník ABC ? Rozletel sa na niekoľko ďalších rovnostranných trojuholníkov!

¹Všetci vieme, že Marek s cukríkmi odmieta robiť čokoľvek iné ako sa s nimi hrať, napríklad ich jesť.

Zoberme si rovnostranný trojuholník ABC . Pre ktoré celé kladné čísla n sa dá tento rovnostranný trojuholník rozdeliť na n rovnostranných (nie nutne rovnakých) trojuholníkov?

3.4 Kubo, Mince a Sušička ($\kappa \leq 5$)

kategórie **alfa** a **beta**

Všetci boli veľmi potešení z výkonu sušičky, a teda začali riadne oslavovať. Malá miestnosť však nie je ideálna na oslavy, a tak sa stalo, že nejaký Adam zhodil pokladničku z bufetu na zem. Následne bufetár Kubo pokojným hlasom vyhnal všetkých okrem Niny z miestnosti, aby niektorý z tých žobrákov neukradol rozsypané peniaze. Namiesto rýchleho upratania mincí späť do kasičky sa však Kubo s Ninou začali hrať finančnú hru. Pochopiteľne, iné semináre využili túto situáciu a sušička pri tom nepozorovane zmizla...

Na čistom FKSáckom koberci² sú dve kôpky – každá obsahuje nenulový počet mincí. Kubo začína hru, a potom sa s Ninou striedajú v ťahoch. Hráč si vo svojom ťahu vyberie kôpku s párnym počtom mincí a presunie z nej polovicu mincí na druhú kôpku. Hru prehráva hráč, ktorý už nemôže urobiť ďalší ťah. Pomôžte Kubovi v závislosti od úvodného počtu mincí na kôpkach určiť či má víťaznú stratégiu³ on alebo Nina.

3.5 Konkurencia Medzi Sušičkami ($\kappa \leq 8$)

kategórie **alfa** a **beta**

Medzitým Fyzikálny ústav Tomáša Suchoríka Slovenskej akadémie vied pripravil experiment s cieľom porovnať dve konkurenčné sušičky valiace sa na náš trh z Ruska. Jedna z nich je Suchoj Supersuch 100, druhá Sucharid SU-35.

Vedci z FUTS SAV získali na experiment 303 rôznych ľudských rúk. Každá ruka má určenú úroveň mokrosti, čo je jedno z čísel 0, 1, 2, a veľkosť, čo je jedno z čísel 0, 1, ..., 100. Neexistujú dve ruky, ktoré by mali rovnakú aj mokrosť aj veľkosť. Tieto ruky následne vedci rozdelili medzi sušičky, pričom každej sušičke dali vysušiť 151 rúk. Platí, že súčet mokrostí rúk, ktoré má vysušiť Suchoj Supersuch 100 je rovnaký ako súčet mokrostí rúk, ktoré má vysušiť Sucharid SU-35. Rovnako aj súčet veľkostí rúk, ktoré suší Suchoj Supersuch 100 je rovnaký ako súčet veľkostí rúk, ktoré suší Sucharid SU-35. Zostane jedna ruka, ktorú nebude sušiť ani jedna sušička. Akú mokrosť a veľkosť môže mať?

3.6 Kalibrovali Mantavo Sušičku

kategórie **alfa** a **beta**

Každá sušička, a teda aj tá, ktorú KMSáci ukradli z FKSKa do KMSKa, musí byť veľmi presne nakalibrovaná – jedna nedotiahnutá šrauba môže spôsobiť, že vám sušička namiesto rúk vysuší humor. Preto existuje dozorný orgán, takzvaný DRDOL – Dozorný Rád pre Dehydratáciu a Odvláčovanie Labiek (DRDOL), ktorý posudzuje či je sušička správne nakalibrovaná alebo nie. Ako určite viete, slovo rad je synonymum pre slovo postupnosť, preto:

Majme postupnosť reálnych čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$, ktoré spĺňajú, že súčty $a_i + a_j$, kde $1 \leq i < j \leq n$, tvoria v nejakom poradí aritmetickú postupnosť s $\frac{1}{2}n(n-1)$ členmi, kde n je prirodzené číslo väčšie alebo rovné ako 5. Dokážte, že $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

3.7 Kalibruje Miro Sušičku

kategórie **alfa** a **beta**

Po pár dňoch tajného používania sa sušička v KMSku pokazila. Miro si povedal: „Ízy“ a dal sa do jej opravovania. Keďže nie je žiaden amatér, spraví to bez návodu. Celú ju rozobral na súčiastky, a potom zložil zase naspäť. Jedna

²na rozdiel od toho v KMS tento sa občas aj povysáva a dokonca ho Marcel už tepoval

³Hráč má v hre víťaznú stratégiu, ak vie vyhrať bez ohľadu na to, ako hrá jeho protivník

súčiastka mu však ostala na stole a ani za nič si nevedel spomenúť kam patrí. Patrila konkrétne do bodu D . Ukážte Mirovi, že bod D patrí do stredu úsečky AE .

Je daný trojuholník ABC . Nech k_1 je kružnica, ktorá prechádza bodom B a dotýka sa priamky AC v bode A . Nech k_2 je kružnica, ktorá prechádza bodom C a dotýka sa priamky AB v bode A . Označme D priesečník kružníc k_1 a k_2 rôznych od A . Priamka AD pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode E rôznom od A . Dokážte, že D je stredom úsečky AE .

3.8 Kto Má Sušičku?

kategória **beta**

Medzitým sa vo FKS už hodnú chvíľu riešilo, čo so stratenou sušičkou. Pochopiteľne pri takejto diskusii treba zachovať chladnú hlavu, preto sa FKSáci začali navzájom oblievať a sušiť (no iba uterákom, keďže nevedeli, kto im sušičku ukradol).

Na kružnici stojí n FKSákov v nemennom poradí. Každý z nich je buď suchý alebo mokrý. V jednom kroku sa môžu dvaja suchí FKSáci vedľa seba zamočiť alebo sa môžu dvaja mokří FKSáci vedľa seba vysušiť. Dva stavy rozdelenia mokrosti FKSákov pokladáme za *ekvivalentné* práve vtedy, keď možno jeden dostať z druhého po konečnom počte krokov. Dva stavy sú *rôzne* práve vtedy, keď existuje FKSák, ktorý je v jednom mokrý a v druhom suchý. V závislosti od kladného celého čísla n určte najväčší počet rôznych stavov, z ktorých žiadne dva nie sú ekvivalentné.

3.9 Koeficient, Majo a Sušička

kategória **beta**

Vysušení FKSáci započali valné zhromaždenie. No nemohli hneď riešiť umiestnenie sušičky, keďže Majo si všimol na zemi jeden zabudnutý trojuholník z tých, ktoré vznikli v tretej úlohe. Vo FKS tak znova zavládla panika. A vtedy sa pred nich všetkých postavil ich Hovorca a povedal, že trojuholníku sa báť nemusia, lebo nemôže byť predsa väčší ako k .

Nájdite najväčšiu reálnu konštantu k takú, že pre každý trojuholník s obsahom S a stranami dlhými a, b, c platí

$$12a^2 + b^2 + c^2 \geq k \cdot S.$$

Pre túto hodnotu k nájdite všetky trojuholníky, pre ktoré nastáva rovnosť.

3.10 Kráľovná Matfyzu – Sušička

kategória **beta**

Na konci dňa to už vyzeralo tak, že FKSáci sa nezhodnú. Adam sušičku vo FKS nechcel. Ale skúste sa hádať s Jarom, ktorý všetkých svojim mocným poradným hlasom presviedča, aby spravili nálet na T2⁴ a sušičku im zobrali. Jaro pochopiteľne netušil, že sušička sa v tom čase nachádzala v KMSku. Nakoniec celé napätie vyvrcholilo až do bodu, kedy sa Adam rozhodol, že abdikuje z funkcie hlavného vedúceho. No, ale čo teraz? FKSáci možno získajú nazad sušičku, ale nie hlavného vedúceho. Môže sušička zastávať funkciu hlavného vedúceho?

Nech $\mathbb{N}$ označuje množinu kladných celých čísel. Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ také, že

$$n! + f(m)! \mid f(n)! + f(m)!$$

platí pre všetky $m, n \in \mathbb{N}$.

⁴Miestnosť KSPákov