



Zadania 2. kola zimnej časti

Termín odoslania 23. október 2023 (pre zahraničie 20. október 2023)

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

2.1 Koľko Možností Stavať ($\kappa \leq 1$)

kategória **alfa**

Dávno predtým, než sa dvaja malí zašmudlaní delikventi preslávili ako maškrtní lovci čarodejní, sa do Začarovaného lesa presťahovala milá ježibabka-architektka. Nemastný-neslaný svet jej víziu nechápal, preto sa rozhodla postaviť si domček z jedla sama. A začala pekne od podlahy – od tvrdých izomaltových dlaždíc.

Ježibabka mala dohromady 14 dlaždíc, z toho 8 modrých a 6 červených (dlaždice rovnakej farby nevie medzi sebou rozlíšiť). Chcela ich poukladať od bráničky ku dverám domčeka jednu za druhou tak, aby medzi každými dvoma červenými dlaždicami bola aspoň jedna modrá. Koľkými spôsobmi vie ježibabka takto poukladať dlaždice?

2.2 Koncept Monumentálnej Strechy ($\kappa \leq 2$)

kategória **alfa**

Ježibabka síce pre svoje presladené názory na univerzite dlho nevydržala, ale podaril sa jej aspoň aký-taký náčrt domčeka. Minimálne strecha vyzerala na papieri celkom k svetlu, teda až do momentu, keď sa jej pošmykla ruka. Namiesto toho, aby cukrový papier pokrčila a zjedla, pokračovala v rysovaní a vytvorila abstraktnú futuristickú koncepciu, ktorú ale v žiadnom prípade nedokázala uplatniť pri svojej stavbe.

Majme rovnostranný trojuholník KMS , ktorého ťažisko označíme T . Nech bod P leží na polpriamke TM a bod Z na kolmici na TM cez bod T tak, aby TPZ bol pravouhlý rovnoramenný trojuholník s odvesnami s dĺžkami strán rovnými dĺžkam strán trojuholníka KMS . Aký je pomer obsahov časti trojuholníka TPZ , ktorá je vnútri trojuholníka KMS , a tej, ktorá je mimo neho?

2.3 Kód Myslím Si ($\kappa \leq 3$)

kategórie **alfa a beta**

Ježibabke robil spoločnosť jej verný drak Bezzubý, ktorého chovala na pelendrekoch a cukrovej vate už celú večnosť. Obluboval vcelku otravnú hru – myslieť na čísla. Aby mu zapchala ústa, rýchlo mu do nich strčila turecký med, ale už bolo neskoro.

Bezzubý myslí na všetky celé kladné čísla N také, že súčet cifier čísla N je 12 a súčet cifier čísla $2N$ je 18. Na koľko čísel myslí Bezzubý?

2.4 Konštrukcia Možno Spadne ($\kappa \leq 5$)

kategórie **alfa a beta**

Ježibabkino nové podkrovie malo lichobežníkový tvar, aby nad ním, v trojuholníkovom priestore hneď pod strechou, mohol bývať Bezzubý. Lenže Bezzubý bude svojou váhou ohýbať trámy a ona si do nich v noci zase tresne hlavu. Keď ježibabka načrtla prepadnuté trámy, spoza jej pleca vykukol drak a začal sa zaujímať o jej náčrt. Katastrofický scenár preto rýchlo premenila na geometrickú úlohu.

V lichobežníku $ABCD$ platí, že strany AB a CD sú rovnobežné, $|BC| = |AD|$, $|DC| = 2|AD|$ a $|AB| = 3|AD|$. Označme E priesečník osí uhlov DAB a CBA . Akú časť lichobežníka tvorí trojuholník ABE ?

2.5 Kto Ma Straší? ($\kappa \leq 8$)

kategórie **alfa** a **beta**

Ježibabka práve pchala marshmallows do vankúšov, keď jej v schránke obalenej jedlým zlatom zašuchotala pošta. Žeby niekto prijal jej pozvánku na kolaudačku? Nie, to bude asi nejaký výhražný list či čo.

V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$\frac{x}{x+4} = \frac{5[x] - 7}{7[x] - 5},$$

kde $[x]$ označuje dolnú celú časť reálneho čísla x (teda najväčšie celé číslo menšie alebo rovné x).

2.6 Koho Máta Spln?

kategórie **alfa** a **beta**

Pre nepresné náčrty a chybné výpočty stavebné práce postupovali pomaly. To však ešte ježibabka nevedela, že sa na nich z tieňov vyšklíra ďalšia katastrofa. Prišiel si na nich posvietiť Mesiac – nastal totiž spln. Na rozdiel od kandizovanej starency býval Bezzubý kvalitne námesačný, sedával v pelechu a mátožným hlasom recitoval matematické úlohy:

Nájdite všetky celé čísla x, y, z spĺňajúce sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x + y &= 1 - z, \\ x^3 + y^3 &= 1 - z^2. \end{aligned}$$

2.7 Kompletizujeme Múčne Sudoku

kategórie **alfa** a **beta**

Ďalší večer si ježibabka s Bezzubým vytiahli dosku na pečenie, ktorá mala z druhej strany štvorčekovú sieť. Keď ježibabu omrzelo valkanie cesta či vykrajovanie, hrali na nej rôzne hry. Dnes sa rozhodli pre sudoku pre dvoch.

Ježibabka a Bezzubý hrajú hru na tabuľke $n \times n$, ktorá je na začiatku prázdna. V každom ťahu môže hráč na voľné políčko tabuľky napísať jedno celé číslo od 1 do n , ak v danom riadku ani stĺpci ešte toto číslo nie je (ako v sudoku). Hráč, ktorý nemôže vykonať ťah, prehráva. V závislosti od čísla n určte, ktorý hráč má víťaznú stratégiu.

2.8 Kradnete Mi Súkromie!

kategória **beta**

Ježibabku dráždilo, že si turisti chodia obzerať, fotografovať a hlavne objedávať jej skromnú chalúпку, preto sa rozhodla použiť zvyšné XXL pelendreký a označiť nimi hranice svojho pozemku. Samozrejme, keďže les prakticky nikomu nepatrí, chcela si ohradiť čo najväčšiu plochu.

Ježibabka postavila plot do tvaru lichobežníka s dĺžkami strán 3, 3, 3, k , kde k je reálne číslo. Aký najväčší obsah môže jej pozemok mať?

2.9 Kolaudačka, Miestami Sranda

kategória **beta**

Párty bola v plnom prúde, malinovky a detský punč tiekli potokom, keď Bezzubý vyrukoval s perfektným nápadom – noc je mladá a všetci okrem ježibabky tiež, prečo sa nezabaviť nejakou skvelou matematickou úlohou? Dedinčania opití levanduľovým sirupom sa ani nenazdali a už im cukrovou polevou písal zadanie na stenu.

Dve kružnice k, l s danými stredmi A, C a rovnakým polomerom r sa zvonku dotýkajú v bode B . Nájdite všetky body $D \in l$ také, že dotyčnica l v bode D pretína k v bodoch E, F a platí $|DE| = |EF|$.

2.10 Kiežby Mali Súcit

kategória **beta**

Jedlý plot z XXL pelendrekov akosi nedokázal udržať ten nápor cukruchtivých banditov, preto prišla zúfalá ježibabka s nápadom dvier na kód a systémom bezpečnostných kamier, ktoré by zaznamenali votrelca a ostreľovali ho tureckým želé. Celé veky sa nikto do domčeka nedostal, až kým si dvaja súrodenci bez omrvinky súcitu so staršou paňou netipli odpoveď správne. A pritom si dal Bezzubý tak záležať.

Definujme nekonečnú postupnosť čísel $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takú, že $a_1 = 2$ a $a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot a_n$. Dokážte, že pre nekonečne veľa hodnôt n je výraz

$$\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n+1}$$

štvorcom celého čísla.