Riešenia 3. kola letnej časti

3.1 Kontaminovaná-ish Marcelova Sušička ($\kappa \leq 1$)

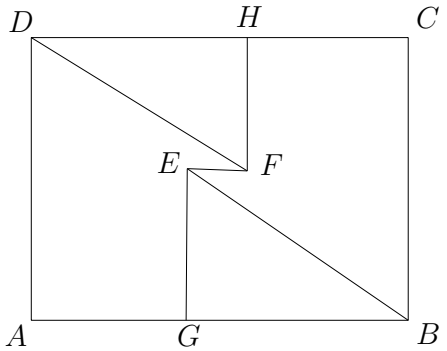
opravoval **Adam**

Zadanie. *Marcel našiel doma legendárny prístroj menom sušička. Keďže nevedel čo s ňou, či je bezpečná a čo vôbec, tak nenechal nič na náhodu a rozhodol sa ju odniesť do FKS. Sušičku vložil do hermeticky uzavretej dekontaminačnej nádoby tvaru obdĺžnika ABCD.*

Majme obdĺžnik ABCD s rozmermi $|AB| = 12$ dm *a* $|BC| = 10$ dm. *Vo vnútri obdĺžnika ABCD ležia body E a F tak, že* $|BE| = 9$ dm, $|DF| = 8$ dm *a priamky BE a DF sú rovnobežné. Taktiež sú rovnobežné aj priamky EF a AB. Ďalej ešte vieme, že priamka BE pretína úsečku AD v jej vnútornom bode. Na to, aby Marcel nádobu otvoril, potrebuje od Teba niečo vedieť. Aká je dĺžka* $|EF|$*?*

Riešenie

Všetky dĺžky vo vzoráku uvažujeme v jednotkách decimetrov, nebudeme ich však pre prehľadnosť písať. Dobrým začiatkom pri geometrických úlohách je nakresliť si orientačný obrázok. V tomto prípade sa pri jeho kreslení musíme zamyslieť, či bude bod E ležať naľavo alebo napravo od bodu F. Odpoveď nám poskytne informácia zo zadania, že priamka BE pretína úsečku AD vo vnútornom bode, a teda bod E bude ležať napravo (skúste sa nad tým zamyslieť ak neviete prečo). Obrázok, ktorý sme dostali, nám toho veľa nehovorí, skúsme si doňho teda niečo doplniť. Konkrétne si doplníme dve kolmice, konkrétne z bodu E na stranu AB a z bodu F na stranu CD. Body, kde sa sa tieto kolmice pretnú so stranami AB a CD, si označíme postupne G a H.



Dostali sme takto dva pravouhlé trojuholníky BEG a DFH. Podľa zadania sú úsečky BE a DF rovnobežné, preto uhly GBE a HDF budú mať rovnakú veľkosť (ak neviete prečo to platí, skúste si to dokázať). Z toho vyplýva, že trojuholníky BEG a DFH budú mať rovnako veľké vnútorné uhly, a preto budú podľa vety *uu podobné*. Vieme, že pomer dĺžok strán BE a DF je $9 : 8$. Kvôli podobnosti trojuholníkov bude aj pomer dĺžok strán EG a FH rovnako $9 : 8$. Súčet dĺžok týchto strán je $|BC| = 10$. Tú keď si rozdelíme v pomere $9 : 8$, dostaneme dĺžky strán $|EG| = 90/17$ a $|FH| = 80/17$.

Pomocou Pytagorovej vety teraz ľahko dorátame dĺžky strán BG aj DH. Začnime s dĺžkou strany BG:

$$|BG|^2 + |EG|^2 = |BE|^2,$$

$$|BG|^2 + \left(\frac{90}{17}\right)^2 = 81,$$

$$|BG| = \sqrt{81 - \left(\frac{90}{17}\right)^2}.$$

Nie je to príliš pekná forma. Sériou úprav ju môžeme (ale nemusíme) zjednodušiť na formu $27\sqrt{21}/17$. Dĺžku DH už takto rátať nemusíme, môžeme si ju vyjadriť podľa podobnosti trojuholníkov ako $(8/9)(27\sqrt{21}/17)$. Poďme teraz zistiť dĺžku $|EF|$. Úsečka EF je rovnobežná so stranou AB. Po krátkom pohľade na obrázok situácie si všimneme, že $|EF| = |BG| + |DH| - |AB|$. Všetky tieto dĺžky poznáme, tak už si to len nejak vyjadrime:

$$|EF| = \frac{27\sqrt{21}}{17} + \frac{8}{9}\frac{27\sqrt{21}}{17} - 12,$$

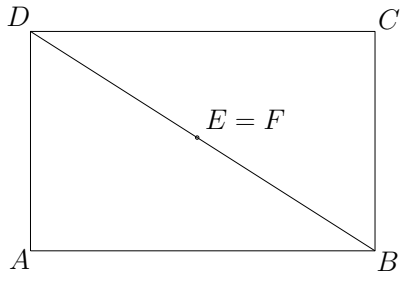
$$|EF| = 3\sqrt{21} - 12,$$

$$|EF| \approx 1.7477.$$

Približnú dĺžku EF získame, keď výraz, ktorý sme dostali, hodíme do kalkulačky. Rovnakú hodnotu dostaneme, aj ak sme výraz pre dĺžku BG nezjednodušili.

Iné riešenie

Keď si nakreslíme obrázok podľa zadania, môžeme si povzdychnúť, že úsečky BE a DF tam len tak nejako „trčia“ dovnútra obdĺžnika a potrebujeme k nim dokresľovať kadejaké trojuholníky aby sme v tom našli zmysel. Je však aj iný spôsob ako si obrázok zjednodušiť, aby sa nám s ním lepšie pracovalo. Keď budeme obdĺžnik $ABCD$ postupne vodorovne „naťahovať“, teda zväčšovať dĺžku strán AB a CD, časom sa nám body E a F stretnú (keď zachováme všetky ostatné dĺžky v zadaní). Toto platí, lebo úsečka EF je rovnobežná so stranou AB. Dĺžka, o ktorú by sme museli predĺžiť AB, aby sa body E a F stretli, je pôvodná dĺžka EF, ktorú sa snažíme zistiť.



Môžeme si teda mierne modifikovať zadanie: dĺžka $|AB|$ nebude 12, ale $12 + |EF|$. Keďže úsečky BE a DF sú rovnobežné, budú v modifikovanom zadaní tvoriť úsečku BD a jej dĺžka bude 17. Obrázok, ktorý vznikne po

roztiahnutí obdĺžnika $ABCD$, je na pohľad oveľa krajší. Skladá sa totiž z dvoch pravouhlých trojuholníkov, ktorých dĺžky strán až na jeden menší úsek poznáme. Keď si napíšeme Pytagorovu vetu pre trojuholník ABD, vieme si z nej vyjadriť dĺžku $|EF|$ ktorú sa snažíme zistiť:

$$\begin{aligned}
|AB|^2 + |AD|^2 &= |BD|^2,\\
(12 + |EF|)^2 + 100 &= 289,\\
(12 + |EF|)^2 &= 189,\\
12 + |EF| &= \sqrt{189},\\
|EF| &= \sqrt{189} - 12,\\
|EF| &= 3\sqrt{21} - 12.
\end{aligned}$$

3.2 Kendy Marek Switchuje ($\kappa \leq 2$)

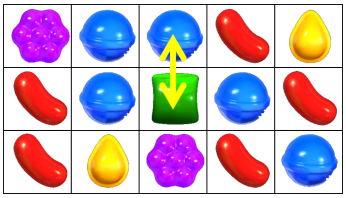
opravovali **Jožo** a **Zlodejka**

Zadanie.

Keď prišiel Marcel aj so svojou sušičkou do FKSka, tak si všimol Mareka hrajúceho sa s cukríkmi[1] *nasledujúcu hru. Hra sa odohráva na pláne $m \times n$ štvorcových políčok, kde m, n sú celé čísla väčšie ako 1 a jedno z nich je aspoň 3. Na každom políčku sa nachádza cukrík práve jednej farby. V jednom ťahu môže Marek vymeniť cukríky na dvoch políčkach so spoločnou stranou, ale to len vtedy, ak sa po výmene budú vedľa seba nachádzať tri cukríky jednej farby v riadku alebo v stĺpci (ako na obrázku). Koľko najmenej farieb cukríkov potrebuje Marek na to, aby sa cukríky dali rozmiestniť do plánu tak, že:*

- *v žiadnom riadku ani v žiadnom stĺpci sa nenachádzajú za sebou tri cukríky rovnakej farby,*
- *nebolo možné spraviť žiaden ťah.*

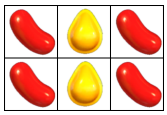
Výsledok určte v závislosti od čísel m, n.



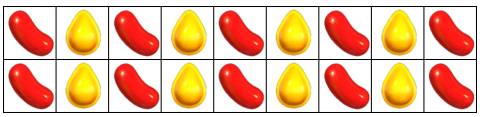
Riešenie

V zadaní úlohy nám vystupujú premenné m a n. V takýchto prípadoch je dobré začať s nejakými malými hodnotami a zoznámiť sa tak s úlohou. Začnime teda s najmenšou možnou hodnotou $m = 2$. Zo zadania vieme, že n musí byť aspoň 3. Už v tom najmenšom možnom pláne rozmerov 2×3 máme tri políčka vedľa seba. Preto nám jedna farba cukríkov nestačí. Budú nám stačiť dve? Po chvíľke skúšania vieme zistiť, že áno.

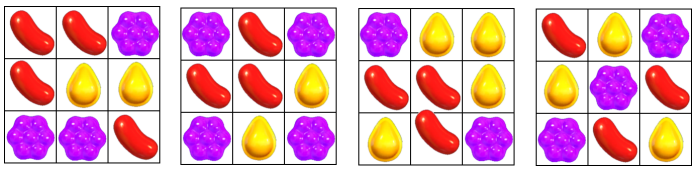
[1] Všetci vieme, že Marek s cukríkmi odmieta robiť čokoľvek iné ako sa s nimi hrať, napríklad ich jesť.



Dokonca z toho môžeme odpozorovať, že podobným spôsobom vieme cukríky uložiť do ľubovoľného plánu s dvomi riadkami. Ak máme plán rozmerov $2 \times n$ pre ľubovoľné prirodzené číslo $n \geq 3$, tak ho vieme vyplniť dvomi cukríkmi nasledovne. Do každého druhého stĺpca počnúc prvým uložíme po dva červené cukríky a do zvyšných stĺpcov po dva žlté cukríky. Takto zaručíme, že v žiadnom riadku (a samozrejme aj stĺpci) nebudú tri cukríky rovnakej farby vedľa seba. Taktiež ľahko vidíme, že žiadnou výmenou nedostaneme tri rovnaké cukríky vedľa seba. Rovnaké argumenty platia aj pre plán rozmerov $m \times 2$ – len celú situáciu otočíme o 90°. Ukázali sme teda, že ak jeden z rozmerov plánu je 2, tak Marek potrebuje najmenej 2 farby cukríkov.



Poďme teda pokračovať a pozrime sa na väčšie plány. Ostali nám tie, v ktorých sú oba rozmery aspoň 3. Opäť si môžeme zobrať najmenší, teda plán rozmerov 3×3. Pôjde vyplniť s dvomi farbami cukríkov? Nech sa snažíme, ako chceme, tak nám to nejde. Môžeme skúsiť teda tri cukríky, čo sa nám už vie podariť. Dokonca aj viacerými spôsobmi.



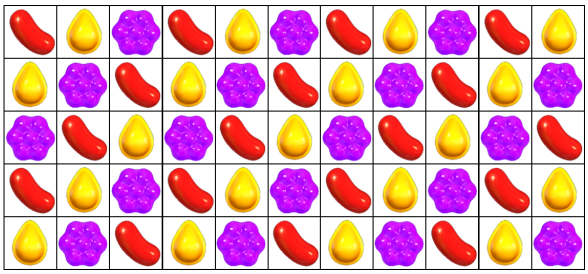
Takto si môžeme skúsiť vyplniť aj ďalšie malé rozmery plánov. Pokračujeme tak dovtedy, kým nezískame dostatočnú predstavu o úlohe. Ďalšie skúšanie už prenechávame na vás. Tu vo vzorovom riešení si vystačíme s tým, čo už máme. Môžeme tak odpozorovať, že Marekovi budú vždy stačiť tri farby cukríkov. Čo potrebujeme spraviť, aby sme sa v tom utvrdili?

1. Ukázať, ako plán správne vyplniť pomocou cukríkov troch farieb.

2. Zdôvodniť, prečo plán iba s dvomi farbami cukríkov vyplniť nevieme. (A tým pádom ho nevieme vyplniť ani menším počtom farieb.)

Vyplnenie tromi farbami cukríkov

Ako plán vyplníme? Úlohu máme vyriešiť všeobecne pre ľubovoľné rozmery plánu. Preto nemôžeme vypĺňať plán len tak hala-bala. Potrebujeme nájsť nejaký pekný systém. S tým môžeme začať už pri vypĺňaní plánu 3×3. Posledné umiestnenie cukríkov vyzerá celkom sľubne. Napr. plán 5×11 by sme podľa neho vedeli vyplniť takto:



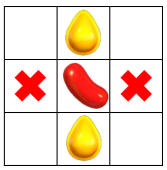
Poďme to napísať poriadne, všeobecne. Plán budeme vypĺňať po diagonálach, ktoré smerujú sprava hore smerom doľava nadol. Prvú diagonálu, teda jedno políčko v ľavom hornom rohu plánu, zaplníme červeným cukríkom. Do druhej diagonály umiestnime žlté cukríky. Do tretej diagonály fialové. Potom zas červené, žlté, fialové, … V tomto poradí postupne vypĺňame diagonály cukríkmi týchto farieb, až kým nevyplníme celú tabuľku.

Spĺňa takéto vyplnenie potrebné vlastnosti? V každom riadku a aj v každom stĺpci sa farby cukríkov striedajú. Preto nemáme ani v riadku, ani v stĺpci tri cukríky rovnakej farby za sebou. Môžeme spraviť nejaký ťah? Uvedomme si, že existujú len dva možné druhy ťahov. V jednom prípade máme v riadku alebo stĺpci dva cukríky rovnakej farby vedľa seba a výmenou k nim presunieme tretí. V druhom prípade máme dva cukríky rovnakej farby, medzi ktorými je jedno políčko a výmenou presunieme medzi dva rovnaké cukríky tretí. Avšak pri našom rozložení sú v každom riadku medzi cukríkmi rovnakých farieb dve políčka. Nemáme tam teda v žiadnom riadku ani dva rovnaké cukríky vedľa seba, ani ob jedno políčko. Preto nevieme spraviť žiaden ťah. Tým pádom je naše rozmiestnenie cukríkov korektné.

Prečo menej nestačí?

A dve farby Marekovi stačiť nebudú? Pozrime sa, ako by to vyzeralo, kebyže Marek má len dve farby cukríkov. Oba rozmery plánu sú aspoň 3. Preto vieme v pláne nájsť štvorec 3×3 políčka, trebárs ten v ľavom hornom rohu. Stačí nám ukázať, že už len tento štvorec Marek nevie vyplniť. Potom totiž nebude vedieť vyplniť celý plán. A to je dobrá správa. Štvorec 3×3 políčka je celkom malý a môžeme v ňom prebrať všetky možnosti, ako môže Marek umiestňovať cukríky. Na to je dobré si nájsť nejaký systém. V závislosti od neho môžeme preberať viac alebo menej prípadov. My si ukážeme jeden z tých stručnejších prístupov.

Pozrime sa na druhý stĺpec nášho štvorca 3×3. Keďže sú v ňom tri políčka, tak tam musíme mať dva cukríky rovnakej farby. Kľudne si môžeme povedať, že je to žltá farba. Zvyšný cukrík v druhom riadku musí byť druhej farby, povedzme červenej. Riadok, v ktorom sa nachádza tento červený cukrík, si nazveme *smutný*. Môže byť na niektorom políčku smutného riadku žltý cukrík? Na prvom políčku smutného riadku nemôže byť. Ak by tam bol, tak by sme mohli spraviť platný ťah vymenením prvých dvoch políčok smutného riadku. Z rovnakého dôvodu nemôžeme mať žltý cukrík ani na treťom políčku smutného riadku. Teda na všetkých políčkach smutného riadku musí byť červený cukrík. To sa ale nemôže stať. Smutný riadok je teda naozaj smutný, lebo kvôli nemu Marek nemôže vyplniť štvorec 3×3 iba dvomi farbami cukríkov. A teda Marek tak nevie vyplniť ani celý plán, pokiaľ má oba rozmery aspoň 3.

smutný riadok 

Záver

Týmto je naša úloha hotová. Ukázali sme teda, že najmenší počet farieb cukríkov, ktorý Marek potrebuje je:

- 2, pokiaľ $m = 2$ alebo $n = 2$;

- 3, pokiaľ $m \geq 3$ a zároveň $n \geq 3$.

3.3 Krutá Mocná Sušička ($\kappa \leq 3$)

opravoval **Dominik**

Zadanie. *Po tom, ako sa podarilo sušičku úspešne nastaviť, si FKSáci povedali, že takto výkonný stroj musia čo najskôr na niečom otestovať. Čo keby mala sušička príliš veľký výkon? Nemôžu si predsa zničiť svoje veci. Alebo ruky. Sušičku sa nakoniec rozhodli otestovať na najväčšom nepriateľovi FKS – rovnostrannom trojuholníku ABC. FKSáci si teda zobrali svoj kľúč od KMSka a nenápadne jeden ukradli. No a čo myslite, že sa stalo, keď namierili naplno pustenú sušičku na rovnostranný trojuholník ABC? Rozletel sa na niekoľko ďalších rovnostranných trojuholníkov!*

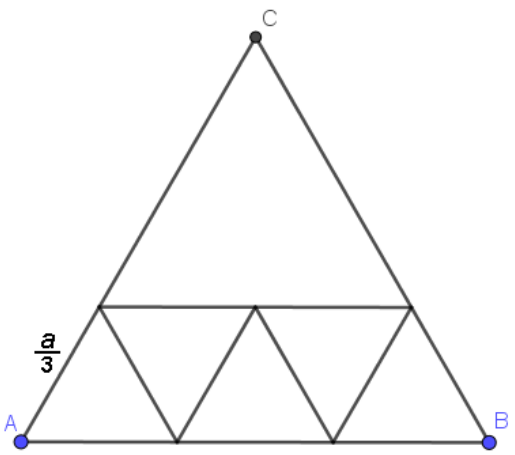
Zoberme si rovnostranný trojuholník ABC. Pre ktoré celé kladné čísla n sa dá tento rovnostranný trojuholník rozdeliť na n rovnostranných (nie nutne rovnakých) trojuholníkov?

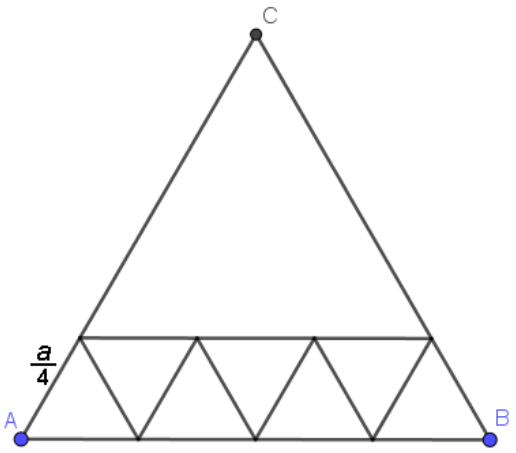
Riešenie

Riešenie tejto úlohy pozostáva z dvoch častí. V prvom rade potrebujeme ukázať, pre aké n môžeme rovnostranný trojuholník rozdeliť na n rovnostranných trojuholníkov. Potrebujeme ale tiež ukázať, prečo to pre iné n nejde. Mnohé z riešení obsahovali len prvú časť, preto sme ich nemohli ohodnotiť plným počtom bodov.

Vo väčšine vašich riešení sa vyskytli dva spôsoby delenia trojuholníka. Pomocou rozdelenia trojuholníka cez stredné priečky dokážeme počet trojuholníkov zvýšiť o tri. Dôležité je, že toto môžeme spraviť pre každý rovnostranný trojuholník, a teda ak ich máme n, môžeme ich mať aj $n + 3$. To je dôležitý začiatok, pretože ak sa nám podarí nájsť tri za sebou idúce čísla, pre ktoré vieme trojuholník rozdeliť na toľko častí, tak to pôjde aj pre všetky vyššie.

Na to, aby sme takéto tri čísla našli, ste často použili aj druhý, o niečo všeobecnejší postup. Jeho základom je rozdelenie trojuholníka na jeden trojuholník a jeden rovnoramenný lichobežník. To je možné tak, že spravíme rovnobežku s jednou so strán. Ak zvolíme vhodnú vzdialenosť od vrchola, môžeme tento lichobežník potom rozdeliť na nepárny počet trojuholníkov. Takto môžeme dostať riešenie pre $n = 6$ a $n = 8$. Na základe predošlého odseku dokážeme vyriešiť úlohu aj pre $n = 7$. Z toho ale už vyplýva, že pre $n \geq 6$ to pôjde vždy. Už predtým sme mali riešenie pre $n = 1$ a $n = 4$.





Ešte potrebujeme ukázať, že pre $n = 2$, 3 a 5 úloha nemá riešenie. Tu je dobré uvedomiť si jeden základný fakt: Každý rovnostranný trojuholník má všetky uhly rovné 60°. Z toho vyplýva, že vrcholy pôvodného trojuholníka musia byť aj vrcholmi niektorého z rozdelených trojuholníkov a uhol pri nich musí byť rovný 60°, teda ho nemôžeme nijako deliť.

Pre $n = 2$ by preto muselo platiť, že v niektorom z dvoch trojuholníkov sú dvoma vrcholmi vrcholy pôvodného trojuholníka. Tieto ale medzi sebou majú stranu, a keďže trojuholníky musia byť rovnostranné, išlo by o celý trojuholník ABC. Teda rozdelenie na dva trojuholníky nie je možné.

Pre $n = 3$ vychádzame z podobnej myšlienky. Ak by niektorý trojuholník obsahoval dva z troch vrcholov pôvodného, nešlo by o rozdelenie na tri trojuholníky. Preto sa každý z trojice trojuholníkov nachádza pri jednom vrchole. Pre každý trojuholník potom musia byť dve strany súčasťou dvoch strán trojuholníka ABC. Tretia strana je pre každý trojuholník otočená o 60°, pretože je rovnobežná so stranou ABC, ktorá v trojuholníku nie je. To ale znamená, že žiadnu zo strán nemajú trojuholníky spoločnú, a preto musí v strede existovať nevyužitý voľný priestor. Rozdelenie na 3 trojuholníky teda nie je možné.

Pre $n = 5$ opäť tri trojuholníky musia byť pri vrcholoch. Priestor, ktorý zostal môže byť buď šesťuholník, ak sa žiadne dva vrcholy malých trojuholníkov nerovnajú, päťuholník, ak sa rovná jeden, štvoruholník, ak dva a trojuholník, ak sa rovnajú všetky. My potrebujeme rozdeliť niektorý z týchto útvarov na dva rovnostranné trojuholníky.

Už sme si ukázali, že rovnostranný trojuholník na dva rovnostranné trojuholníky rozdeliť nevieme. Trojuholník, ktorý sme dostali v predošlom odseku však musí byť rovnostranný, pretože súčty dvoch strán malých trojuholníkov sa vždy musia rovnať dĺžke strany (nazvime túto dĺžku a) trojuholníka ABC. Vzniká nám teda sústava rovníc $m + n = n + o = o + m = a$, ktorej riešenie je $n = o = m$, čo sú strany trojuholníka v strede. Ide teda o rovnostranný trojuholník a ten na dva rozdeliť nevieme.

Ak by útvarom v strede bol štvoruholník, na dva trojuholníky by sme ho mohli rozdeliť jedine uhlopriečkou, ktorú by mali spoločnú, teda by tieto dva trojuholníky museli byť zhodné.Keď spojíme pozdĺž jednej strany dva zhodné rovnostranné trojuholníky, dostaneme rovnobežník. My sme ale dostali lichobežník, ktorého jednu základňu tvoria dva spoločné vrcholy a protiľahlou základňou je časť tretej strany trojuholníka ABC. Teda ani takto to rozdeliť nepôjde.

Ak by útvar v strede bol päťuholník, tak by mal súčet vnútorných uhlov 540°. Tieto vnútorné uhly môžeme rozdeliť, no v žiadnom prípade sa súčet uhlov v rozdelenom útvare nezníži. Keďže chceme útvar rozdeliť na dva

trojuholníky, potrebujeme, aby mal súčet vnútorných uhlov nanajvýš 360°. A to päťuholník nespĺňa. Vlastne ani šesťuholník, takže úloha je vyriešená.

Rovnostranný trojuholník ABC môžeme rozdeliť na ľubovoľný prirodzený počet n rovnostranných trojuholníkov okrem $n = 2$, 3 a 5.

3.4 Kubo, Mince a Sušička ($\kappa \leq 5$)

opravovali **Kika** a **Boďo**

Zadanie. *Všetci boli veľmi potešení z výkonu sušičky, a teda začali riadne oslavovať. Malá miestnosť však nie je ideálna na oslavy, a tak sa stalo, že nejaký Adam zhodil pokladničku z bufetu na zem. Následne bufetár Kubo pokojným hlasom vyhnal všetkých okrem Niny z miestnosti, aby niektorý z tých žobrákov neukradol rozsypané peniaze. Namiesto rýchleho upratania mincí späť do kasičky sa však Kubo s Ninou začali hrať finančnú hru. Pochopiteľne, iné semináre využili túto situáciu a sušička pri tom nepozorovane zmizla...*

Na čistom FKSáckom koberci[2] *sú dve kôpky – každá obsahuje nenulový počet mincí. Kubo začína hru, a potom sa s Ninou striedajú v ťahoch. Hráč si vo svojom ťahu vyberie kôpku s párnym počtom mincí a presunie z nej polovicu mincí na druhú kôpku. Hru prehráva hráč, ktorý už nemôže urobiť ďalší ťah. Pomôžte Kubovi v závislosti od úvodného počtu mincí na kôpkach určiť či má víťaznú stratégiu*[3] *on alebo Nina.*

Riešenie

Ešte predtým, než sa začneme hrať, si uvedomme, že nezáleží na poradí kôpok. Je jedno, ktorá kôpka je prvá a ktorá je druhá. Nás zaujímajú len počty mincí na kôpkach.

Na začiatku hry môžu nastať dve situácie. Celkový súčet mincí na oboch kôpkach môže byť párny alebo nepárny. Ak je nepárny, znamená to, že na jednej kôpke je párny počet mincí a na druhej nepárny, lebo akokoľvek rozdelím nepárne číslo na dve čísla, vždy bude jedno z nich párne a jedno nepárne. Keďže ťahmi sa celkový súčet mincí nemení, vždy bude na jednej kôpke párny a na jednej nepárny počet mincí a hrať sa bude donekonečna.

Hra je zaujímavejšia, keď je súčet párny. Na počty mincí sa odteraz budeme pozerať trochu inak. Každý počet mincí N vieme zapísať ako $2^x Z$, kde Z je nepárne číslo. Namiesto každého N teda budeme uvažovať x, kde x je najväčšia mocnina 2, ktorá delí N. Odteraz sa budeme zaoberať len týmito mocninami (x-kami) a počty mincí na kôpkach budeme značiť len pomocou nich, pretože v tejto hre sa kôpky s rôznym počtom mincí, ale s rovnakým x správajú úplne identicky. Aritmetika s takýmito číslami funguje inak, ako s bežnými číslami. Keď takéto číslo x rozdelím napoly, dostanem $x - 1$. Keď sčítam $x + y$, kde $(x < y)$, výsledok bude x. Pozrime sa aj podrobne, čo sa pri takomto sčitovaní deje:

$$2^x Z_1 + 2^y Z_2 = 2^x \left(2^{y-x} Z_2 + Z_1\right)$$

Keďže $2^{y-x} Z_2 + Z_1$ je nepárne číslo, tak $2^x \left(2^{y-x} Z_2 + Z_1\right) = 2^x Z_3$ je v našom systéme x.

To však platí iba keď $x < y$. Čo keď $x = y$? V tomto prípade výsledok bude buď $x + 1$ alebo $x + 2$, alebo $x + k$, kde k je prirodzené číslo. Iba podľa x a y sa nedá povedať, ktoré z toho. Napríklad pre bežné čísla $4 + 4 = 8$ dostaneme $2 + 2 = 3$ a pre bežné čísla $4 + 12 = 16$ dostaneme $2 + 2 = 4$. Pre bežné čísla $124 + 4 = 128$ máme $2 + 2 = 7$. Neskôr si však ukážeme, že to vôbec nevadí a podstatné je iba to, že sčítaním dvoch rovnakých mocnín dostaneme väčší výsledok.

[2] na rozdiel od toho v KMS tento sa občas aj povysáva a dokonca ho Marcel už tepoval

[3] Hráč má v hre víťaznú stratégiu, ak vie vyhrať bez ohľadu na to, ako hrá jeho protivník

Pozrime sa teraz v kontexte tohto nového zápisu čísel na hru s mincami. Dve kôpky s počtom mincí N a M si reprezentujeme usporiadanou dvojicou čísel (x, y), kde $N = 2^x Z_1$; $M = 2^y Z_2$; $x \leq y$. Hra sa skončí, keď na kôpkach sú čísla $(0, 0)$. Vtedy sú obe čísla nepárne, žiadna kôpka sa nedá rozdeliť a hráč na ťahu prehráva. Na začiatku sme si ukázali, že hra $(0, 1)$ sa bude hrať donekonečna. (Dokonca hra $(0, k)$, $k > 0$ sa bude hrať donekonečna.)

Rozoberme si najprv prípady, keď $x = y$, teda situácie tvaru (x, x). Tu vôbec nezáleží na tom, ktorý hráč rozdelí ktorú kôpku, hra bude postupovať vždy rovnako. Po rozdelení kôpky x sa z nej stane kôpka $x - 1$ a k druhej kôpke sa pripočíta $x - 1$. Keďže $x - 1 < x$, dostaneme kôpky $(x - 1, x - 1)$. Takto to bude pokračovať až k $(0, 0)$, kedy niektorý hráč prehrá. Keďže hra postupuje stále rovnako, kto prehrá závisí jedine od parity x. Pre nepárne x vyhrá prvý hráč (Kubo) a pre párne druhý hráč (Nina).

Čo však, keď $x \neq y$? Keďže platí $x < y$ a pri "sčítavaní" čísel určuje výsledok to menšie, všetko závisí od x. Ak je x nepárne, prvý hráč rozdelí kôpku x. Je jedno, aké veľké bolo y, druhý hráč proste dostane situáciu $(x - 1, y + (x - 1)) = (x - 1, x - 1)$ a prehrá, lebo už nemá na výber. Takýmto spôsobom hráč dokáže situáciu (x, y) premeniť na (x, x), ak mu to vyhovuje.

Ak je x párne, ten hráč, ktorý rozdelí x, prehrá. Druhý hráč vtedy totiž dostane $(x - 1, x - 1)$, čo sú dve rovnaké nepárne čísla, a preto vyhrávajúca pozícia. Prvý hráč teda rozdelí y a nastane situácia $(x + (y - 1), y - 1) = (x, y - 1)$. Druhý hráč je teraz postavený pred rovnakú situáciu ako predtým prvý. Ak by rozdelil x, prehrá. Musí teda rozdeliť $y - 1$, čím sa presunieme k $(x + (y - 2), y - 2) = (x, y - 2)$. Vidíme, že y sa bude zmenšovať, až kým nedostaneme situáciu $(x, x + 1)$. Stále platí, že ten, čo rozdelí x, prehrá, preto hráč na ťahu rozdelí $x + 1$. Posunieme sa do $(x + x, x)$. Tu môžu nastať dva prípady. Prvý prípad nastane, keď $x + x = x + 1$. Vtedy máme situáciu $(x + 1, x)$, vymeníme kôpky na $(x, x + 1)$ a sme v tej istej pozícii, ale pre iného hráča. Ten nechce prehrať, takže spraví to isté, čo jeho súper a hra bude takto pokračovať donekonečna. Ak zrovna pre naše x platí $x + x = x + k$, dostaneme $(x + k, x)$, znova vymeníme kôpky na $(x, x + k) = (x, y')$. Odtiaľto bude priebeh znova rovnaký, y' sa bude zmenšovať až ku $x + 1$ a celý cyklus sa zopakuje. Pre párne x teda hra bude trvať donekonečna.

Zhrnutie

Keď si počty mincí na kôpkach preložíme do nášho formátu čísel (x, y), kde $x \leq y$, platia nasledovné podmienky:

- Ak $x = y$ a x je nepárne, vyhrá prvý hráč (Kubo).
- Ak $x = y$ a x je párne, vyhrá druhý hráč (Nina).
- Ak $x \neq y$ a x je nepárne, vyhrá prvý hráč (Kubo).
- Ak $x \neq y$ a x je párne, hra sa nikdy neskončí.

3.5 Konkurencia Medzi Sušičkami ($\kappa \leq 8$)

opravovali **Gianetta** a **Matúš**

Zadanie. *Medzitým Fyzikálny ústav Tomáša Suchoríka Slovenskej akadémie vied pripravil experiment s cieľom porovnať dve konkurenčné sušičky valiace sa na náš trh z Ruska. Jedna z nich je Suchoj Supersuch 100, druhá Sucharid SU-35.*

Vedci z FUTS SAV získali na experiment 303 *rôznych ľudských rúk. Každá ruka má určenú úroveň mokrosti, čo je jedno z čísel* 0, 1, 2, *a veľkosť, čo je jedno z čísel* 0, 1, …, 100. *Neexistujú dve ruky, ktoré by mali rovnakú aj mokrosť aj veľkosť. Tieto ruky následne vedci rozdelili medzi sušičky, pričom každej sušičke dali vysušiť* 151 *rúk. Platí, že súčet mokrostí rúk, ktoré má vysušiť Suchoj Supersuch 100 je rovnaký ako súčet mokrostí rúk, ktoré má vysušiť Sucharid*

SU-35. Rovnako aj súčet veľkostí rúk, ktoré suší Suchoj Supersuch 100 je rovnaký ako súčet veľkostí rúk, ktoré suší Sucharid SU-35. Zostane jedna ruka, ktorú nebude sušiť ani jedna sušička. Akú mokrosť a veľkosť môže mať?

Riešenie

Označme si ruku s veľkosťou i a mokrosťou j ako usporiadanú dvojicu (i, j). Všetkých možných dvojíc (veľkosť, mokrosť) je $101 \cdot 3 = 303$, všetkých rúk je tiež 303 a vieme, že žiadna dvojica sa nesmie zopakovať. To znamená, že každá dvojica (veľkosť, mokrosť) sa vyskytne ako ruka práve raz.

Vieme, že súčet mokrostí všetkých rúk okrem vynechanej musí byť párne číslo, aby sme ho vedeli rozdeliť na dve rovnaké časti, podobne aj súčet veľkostí.

Vieme ľahko vypočítať, že súčet mokrostí všetkých rúk je $(0 + 1 + 2) \cdot 101 = 303$. Pretože chceme jednu vynechať a následne zvyšok rozdeliť na dve časti s rovnako veľkým súčtom mokrostí, musí byť mokrosť vynechanej ruky nepárna, a teda 1.

Podobne, súčet veľkostí všetkých rúk je $3 \cdot \frac{100 \cdot 101}{2} = 15150$. Ak chceme jednu ruku vynechať a zvyšok rozdeliť na dve časti s rovnako veľkým súčtom veľkostí, musí mať vynechaná ruka párnu veľkosť, teda vynechaná ruka má veľkosť $2k$ pre nejaké $k \in \{0, 1, \ldots, 50\}$.

Teraz potrebujeme dokázať, že ak vynecháme ruku $(2k, 1)$, ostatné ruky vieme zakaždým vyhovujúco rozdeliť na 2 časti.

Všimnime si, že nám stačí pre každú vynechanú ruku $(2k, 1)$ ukázať také rozloženie, aby v prvej sušičke bol súčet mokrostí rúk 151 a súčet veľkostí

$$\frac{15150 - 2k}{2} = 7575 - k.$$

Ak sa nám to podarí dosiahnuť a vieme, že súčet veľkostí všetkých rúk okrem vynechanej je $15150 - 2k$, súčet veľkostí v druhej sušičke bude tiež $7575 - k$. Preto nám stačí vyberať ruky len do prvej sušičky, do druhej pôjdu všetky ostatné okrem tej vynechanej.

Najprv dajme do prvej sušičky ruku $(1, 1)$ a ruky $(x, 2)$ pre všetky $26 \leq x \leq 100$.
Ešte tam pridajme ruky $(0, 0)$ a $(x, 0)$ pre všetky $2 \leq x \leq 75$.

mok. \ veľ.	0	1	2	...	25	26	27	...	74	75	76	...	99	100
0														
1														
2														

Žiadna z týchto rúk nie je tá, ktorá mala byť vynechaná, pretože je buď nepárnej veľkosti alebo párnej mokrosti. Rovnako si môžeme všimnúť, že počet rúk, ktoré sme pridelili do prvej sušičky, je presne 151, čo je práve toľko, koľko chceme.

Spočítajme si teraz súčet mokrostí a veľkostí rúk, ktoré sme práve pridelili prvej sušičke. Súčet mokrostí rúk v prvej sušičke je $1 + 75 \cdot 2 + 75 \cdot 0 = 151$. Súčet veľkostí rúk v prvej sušičke je

$$1 + \frac{(26 + 100) \cdot 75}{2} + \frac{75 \cdot 76}{2} - 1 = 7575.$$

My ale potrebujeme, aby súčet veľkostí rúk v prvej sušičke bol $7575 - k$.

Ak $k = 0$, je hotovo. Inak vymeníme ruku $(25 + k, 2)$, ktorá v prvej sušičke určite je, za ruku $(25, 2)$, ktorá tam nie je.

Tým dosiahneme potrebný súčet.

3.6 Kalibrovali Mantavo Sušičku

opravoval **Juro**

Zadanie. *Každá sušička, a teda aj tá, ktorú KMSáci ukradli z FKSka do KMSka, musí byť veľmi presne nakalibrovaná – jedna nedotiahnutá šrauba môže spôsobiť, že vám sušička namiesto rúk vysuší humor. Preto existuje dozorný orgán, takzvaný DRDOL – Dozorný Rad pre Dehydratáciu a Odvlažovanie Labiek (DRDOL), ktorý posudzuje či je sušička správne nakalibrovaná alebo nie. Ako určite viete, slovo rad je synonymum pre slovo postupnosť, preto:*

Majme postupnosť reálnych čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ktoré spĺňajú, že súčty $a_i + a_j$, kde $1 \le i < j \le n$, tvoria v nejakom poradí aritmetickú postupnosť s $\frac{1}{2}n(n-1)$ členmi, kde n je prirodzené číslo väčšie alebo rovné ako 5. Dokážte, že $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Riešenie

Prvý (a asi najdôležitejší) krok je určiť si BUNV[4] $a_1 \le \cdots \le a_n$. Toto spraviť môžeme, pretože tak či tak sa každá dvojica $a_i + a_j$ bude vyskytovať v usporiadanej aj neusporiadanej postupnosti práve raz. Môžeme dokonca uBUNVovať aj viac – môžeme povedať že $a_0 = 0$ a diferencia výslednej aritmetickej postupnosti $d = 1$, ale toto nebudeme potrebovať.

Označme si pár vecí, aby sa nám krajšie pracovalo. Nech $MAX = n(n-1)/2$. Našu aritmetickú postupnosť si označme ako $\{b_k : k \le MAX\}$, t. j. $b_k = a_i + a_j$ je k-ty najmenší člen (pre nejakú dvojicu i, j). Taktiež si označme $d = b_k - b_{k-1}$ jej diferenciu (diferencia je všeobecný pojem pre rozdiel dvoch členov aritmetickej postupnosti).

Zjavne najmenší súčet budú tvoriť dve najmenšie čísla, teda $b_1 = a_1 + a_2$. Obdobne aj $b_2 = a_1 + a_3$, $b_{MAX} = a_{n-1} + a_n$ a $b_{MAX-1} = a_{n-2} + a_n$. Verte či nie, už je to skoro vyriešené. Ak si vezmeme, že platí

$$b_1 + b_{MAX} = b_1 + b_{MAX-1} + d = b_2 + b_{MAX-1},$$

tak po rozpísaní získame

$$(a_1 + a_2) + (a_{n-1} + a_n) = (a_1 + a_3) + (a_{n-2} + a_n),$$

$$a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2}.$$

A máme hotovo. Čože? Kde je riešenie? Ak $n > 5$, tak obe strany rovnice sú niektoré **rôzne** členy v našej postupnosti $\{b_k\}$, pretože postupnosť $\{b_k\}$ je tvorená z členov $a_i + a_j$ pre všetky $i, j \le n$. Ak sa ale dva členy v aritmetickej

[4] BUNV znamená bez ujmy na všeobecnosti. Teda môžeme predpokladať že niečo platí, pretože či to platí, či nie, výsledok vyjde rovnaký

postupnosti rovnajú, tak musí byť celá postupnosť konštantná, pretože jej diferencia je 0. Teda aj pôvodná postupnosť $\{a_k\}$ musí byť konštantná.

Treba ale rozlíšiť prípad $n = 5$, na ktorý sa ľahko zabudne. Pre $n = 5$ platí $a_2 + a_4 = 2a_3$, resp. $a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = b_2 - b_1 = d$. Za súčtom $b_2 = a_1 + a_3$ musí nasledovať súčet $b_3 = a_1 + a_4$, pretože je presne o d väčší. Z tohto rovno vyplývajú iba dve možné poradia, ktoré môžu nastať:

$$a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_1 + a_4 < a_1 + a_5 < a_2 + a_3 < a_2 + a_4 < a_3 + a_4 < a_2 + a_5 < a_3 + a_5 < a_4 + a_5,$$

$$a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_1 + a_4 < a_2 + a_3 < a_2 + a_4 < a_3 + a_4 < a_1 + a_5 < a_2 + a_5 < a_3 + a_5 < a_4 + a_5.$$

V prvom prípade stačí odčítať $d = (a_1 + a_5) - (a_1 + a_4) = a_5 - a_4$, z čoho dostávame $a_2 + a_5 = a_2 + a_4 + d = a_3 + a_4$.V druhom prípade dostaneme obdobne $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$. Každopádne sme teda našli dva rôzne členy v b-čkovej postupnosti, ktoré majú rovnakú hodnotu, a teda nutne celá postupnosť musí byť konštantná.

3.7 Kalibruje Miro Sušičku

opravoval **Marek**

Zadanie. *Po pár dňoch tajného používania sa sušička v KMSku pokazila. Miro si povedal: „Ízy“ a dal sa do jej opravovania. Keďže nie je žiaden amatér, spraví to bez návodu. Celú ju rozobral na súčiastky, a potom zložil zase naspäť. Jedna súčiastka mu však ostala na stole a ani za nič si nevedel spomenúť kam patrí. Patrila konkrétne do bodu D. Ukážte Mirovi, že bod D patrí do stredu úsečky AE.*

Je daný trojuholník ABC. Nech k_1 je kružnica, ktorá prechádza bodom B a dotýka sa priamky AC v bode A. Nech k_2 je kružnica, ktorá prechádza bodom C a dotýka sa priamky AB v bode A. Označme D priesečník kružníc k_1 a k_2 rôzny od A. Priamka AD pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode E rôznom od A. Dokážte, že D je stredom úsečky AE.

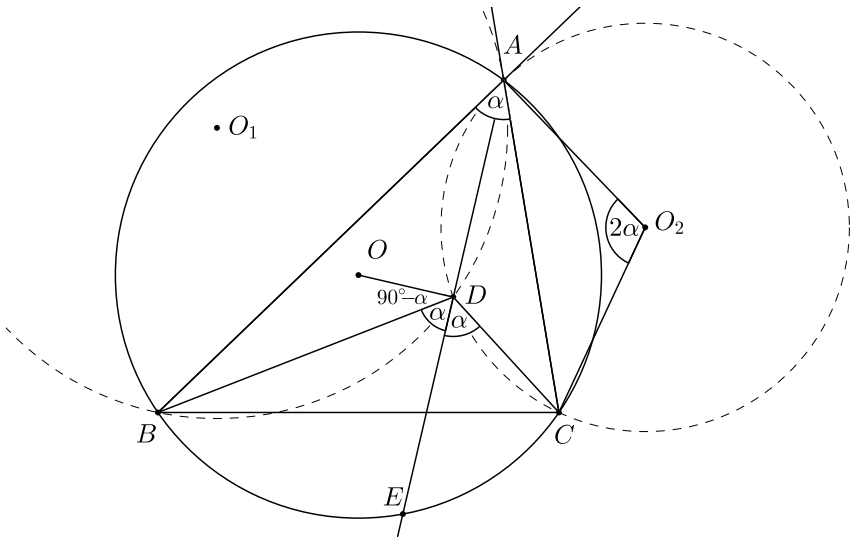
Riešenie

Označíme si vnútorné uhly trojuholníka ABC štandardne α, β, γ. Ďalej si označíme O stred kružnice opísanej trojuholníku ABC, O_1 a O_2 stredy kružníc k_1 a k_2. Budeme uvažovať konfiguráciu, kde A je v tej istej polrovine ako bod C danej osou strany BC.

Ako prvé si riešiteľ môže všimnúť niekoľko vlastností. Veľa z nich nie je podstatných, pre toto konkrétne riešenie no nevylučujeme možnosť, že môžu viesť na riešenie. Ako to už zvykom býva pri riešení geometrie, budeme sa venovať iba tým vlastnostiam, ktoré vedú k riešeniu a ostatné naozaj zaujímavé postrehy necháme na riešiteľa, aby ich našiel a možno z nich vyčaroval riešenie (alebo sa z nich aspoň tešil).

Zo stredového, obvodového a úsekového uhla je po zamyslení zrejmé, že $|\sphericalangle AO_2C| = 2\alpha$. (Zamyslenie znamená, zoberme ľubovoľný bod X na oblúku k_2 neobsahujúci D, trojuholník AXC má obvodový uhol pri X, ktorý má zhodnú veľkosť ako úsekový uhol $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, stredový je teda dvojnásobok.) Obdobne $|\sphericalangle BO_1A| = 2\alpha$. Následne znovu zo stredového a obvodového uhla vidíme, že $|\sphericalangle CDA| = 180° - \alpha$ a $|\sphericalangle ADB| = 180° - \alpha$. Preto $|\sphericalangle EDC| = \alpha$, aj $|\sphericalangle BDE| = \alpha$.

Na to, aby sme ukázali, že D je stredom úsečky, treba ukázať, že DO je kolmica na AE (t. j. kolmica na tetivu idúca stredom kružnice polí tetivu).



Teraz si všimnime, že $|\sphericalangle BDC| = 2\alpha = |\sphericalangle BOC|$, teda $BODC$ ležia na kružnici v tomto poradí (vzhľadom na našu konfiguráciu). Ďalej $|\sphericalangle OCB| = 90° - \alpha$, nakoľko OCB je rovnoramenný trojuholník a uhol $|\sphericalangle BOC| = 2\alpha$. Taktiež vďaka tetivovosti $BODC$ vieme teraz, že aj $|\sphericalangle ODB| = 90° - \alpha$. A teda v súčte s $|\sphericalangle BDE|$ máme veľkosť uhla $|\sphericalangle ODE| = 90°$. Preto D je stredom úsečky AE.

Autorova poznámka: Prezentované riešenie je výrazne jednoduchšie a úhľadnejšie ako autor pôvodne úlohu vyriešil. Samotné vyriešenie úlohy je len polovicou roboty, druhou polovicou (možno ľahšou) je napísať riešenie tak, aby neobsahovalo plevel a stále bolo matematicky správne. Preto sa treba zamyslieť pri spisovaní riešenia, čo skutočne potrebujeme, čo bude prekážať a čomu sa nakoniec môžeme vyhnúť úplne. Autor sa takto napríklad vyhol zbytočnému označeniu uhlov $\delta = |\sphericalangle DBO|$, $\varepsilon = |\sphericalangle OBA|$, ktoré v odplevelovanom riešení nie sú nakoniec potrebné.

Bonusová myšlienka: Môžeme si všimnúť, že stredy strán AB a AC a body D, O, A ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom AO. Ak by sa nám podarilo dokázať túto vlastnosť skorej ako kolmosť uhla ODE, tak kolmosť máme zadarmo, a teda aj úlohu.

3.8 Kto Má Sušičku?

opravoval **Ákos**

Zadanie. *Medzitým sa vo FKS už hodnú chvíľu riešilo, čo so stratenou sušičkou. Pochopiteľne pri takejto diskusii treba zachovať chladnú hlavu, preto sa FKSáci začali navzájom oblievať a sušiť (no iba uterákom, keďže nevedeli, kto im sušičku ukradol).*

Na kružnici stojí n FKSákov v nemennom poradí. Každý z nich je buď suchý alebo mokrý. V jednom kroku sa môžu dvaja suchí FKSáci vedľa seba zamočiť alebo sa môžu dvaja mokrí FKSáci vedľa seba vysušiť. Dva stavy rozdelenia mokrosti FKSákov pokladáme za ekvivalentné *práve vtedy, keď možno jeden dostať z druhého po konečnom počte krokov. Dva stavy sú* rôzne *práve vtedy, keď existuje FKSák, ktorý je v jednom mokrý a v druhom suchý. V závislosti od kladného celého čísla n určte najväčší počet rôznych stavov, z ktorých žiadne dva nie sú ekvivalentné.*

Riešenie

Môžeme si všimnúť, že nejaké dva stavy sú *ekvivalentné* s daným stavom S, ak sú ekvivalentné aj navzájom. Vyplýva to z toho dôvodu, že ak sú nejaké stavy U, V oba ekvivalentné so stavom S, tak existuje konečná postupnosť krokov,

ktoré prenášajú U na V, menovite tie, ktoré prenesú U na S a následne ťahy prenášajúce S na V. To je dokopy konečne veľa krokov. Tým sme toto tvrdenie ukázali. Dodáme, že hocijaký stav je ekvivalentný sám so sebou.

Teraz ak uvažujeme všetky možné stavy, tak vlastne chceme spočítať, že koľko existuje rôznych skupín navzájom ekvivalentných stavov. Predstavme si to ako vyberanie jednej skupiny po druhej: Vyberieme si zatiaľ nevybraný stav a aj všetky ekvivalentné s ním (toto celé nazveme ako jeden *ťah*). Skončíme, keď sme vybrali všetky stavy. Uvedomme si, že počet takýchto *ťahov* je práve odpoveďou na našu otázku: stavy z dvoch rôznych *ťahov* musia byť neekvivalentné, pretože inak by boli vybrané v rovnakom kroku. [5]

Takže ideme si určiť počet všetkých takýchto skupín/tried pre dané n-ká.

Pre nepárne n bude odpoveďou 2, pretože si vieme zadefinovať invariant, ktorý nám určuje dve rôzne triedy: a to je parita počtu mokrých (M) ľudí. Tieto triedy sú naozaj neprázdne, pretože stavy všetci M resp. všetci S sú v jednej resp. druhej triede. Teda treba nám ukázať bez ujmy na všeobecnosť, že ak máme nepárny počet ľudí a nepárny počet M (mokrých) ľudí, tak sa vieme dostať do stavu; hocijaké rozdelenie s nepárnym počtom mokrých ľudí. Tak poďme na to.

Skupinu vedľa seba stojacich ľudí s rovnakou suchosťou/mokrosťou nazveme *sekvencia* (kľudne aj veľkosti 1). Ľahko si všimneme, že buď je sekvencia celá kružnica, alebo vedľa nej sa nachádzajú dve sekvencie s opačnou suchosťou/mokrosťou, (ak máme len 2 sekvencie, tak je len jeden sused). Teda máme buď 1-nu alebo párny počet sekvencií, teda musia sa striedať. Ale dokopy je nepárny počet ľudí, teda niekde v nejakej sekvencií je párny počet ľudí. V tejto párnej sekvencii si vedia v niekoľko krokoch všetci zmeniť ich suchosť/mokrosť triviálnym spôsobom. A teraz si všimnime, že sa buď spravila jedna veľká sekvencia a kvôli invariante sme sa nutne dostali do stavu všetci mokrý, alebo sme prepojili nejaké 2 sekvencie toho druhého typu, čím sme zmenšili počet sekvencií o 2. Teda vždy si môžeme niekoľkými krokmi znížiť počet sekvencií. Teda vieme sa dostať k jednej sekvencii. Preto sú naozaj všetky začínajúce stavy s nepárnym M v rovnakej triede. Rovnako sa ukáže, že všetky stavy s nepárnym S sú v rovnakej triede. A keďže máme možnosť voľby nepárne M alebo nepárne S, tak máme počet tried naozaj 2.

Prejdime teraz k párnym n-kám. Tu po chvíli uvažovania malých prípadov si hneď môžeme všimnúť, že tých tried môže byť kľudne viac, napríklad pre $n = 2$ máme 3 rôzne triedy, pre $n = 4$ až 5 tried. Môžeme si všimnúť, že invariant z predošlého prípadu tu funguje tiež, avšak existujú stavy, ktoré majú rovnakú hodnotu podľa tohto invariantu, ale nie sú ekvivalentné. Tiež nám nefunguje úvaha z predošlej časti, čo nám zagarantovala, že môžeme znižovať počet sekvencií (nemusí nutne existovať sekvencia párnej dĺžky).

Potrebujeme si teda nájsť nejaký jemnejší invariant, ktorý lepšie rozdeľuje prípady. Všimnime si, že vieme ofarbiť všetkých ľudí v kruhu striedavo (Párnou farbou (P) a Nepárnou farbou (N)). Pri každom kroku zmení stav práve jeden z oboch frakcií, a to ešte z rovnakého stavu na ten druhý. Nasledovný invariant je nádejný: rozdiel počtu M vo frakciách N a P sa nemení. (Treba to myslieť tak, že ak na začiatku je päť mokrých vo frakcii N a traja mokrí vo frakcii P, tak hodnota stavu je $5 - 3 = 2$, a ak na začiatku sú traja mokrí vo frakcii N a päť mokrých vo frakcii P, tak hodnota stavu je $3 - 5 = -2$.) To nám napovedá o tom, že ak $n = 2k$, tak maximálna hodnota tohto invariantu je k a minimálna $-k$, čo zodpovedá $2k + 1 = n + 1$ rôznym triedam. (Všimnime si, že prípady $n = 2, 4$ nám naozaj dávali tento výsledok). Nejaký člen každej triedy sa dá ľahko skonštruovať – ak chceme rozdiel 0, tak dáme všetkých na M; a keď má byť rozdiel $\pm i$, tak okrem $1 \leq i \leq k$ členov tej správnej frakcie dáme všetkých ostatných na S a tých i na M. Takže aspoň $n + 1$ rôznych tried už máme. Teraz treba ukázať, že tento invariant je presný, teda rovnakú hodnotu majú práve ekvivalentné stavy. Poďme si to teda ukázať.

[5] Tu definovaná relácia "z A do B sa môžeme dostať konečne veľa krokmi" sa nazýva všeobecne relácia ekvivalencie. Tu definované skupiny sa nazývajú triedy ekvivalencie pre danú reláciu ekvivalencie.

Znova máme niekoľko sekvencií. Ak máme iba jednu, tak máme zjavne hodnotu 0 v invariante. Ak nie, tak máme párny počet sekvencií v striedavom poradí. Teraz ak máme sekvenciu párnej dĺžky, tak ju môžeme kľudne eliminovať. Dostávame sa teda do stavu, kde každá sekvencia je nepárnej dĺžky (alebo znova máme iba jednu sekvenciu a sme v prípade 0). Teraz teda máme niekoľko nepárnych sekvencií. Tak nech sa nejaká daná sekvencia Mokrých začína s členom vo frakcii N (môžeme si to povedať bez ujmy na všeobecnosť, pretože výmenou písmeniek N a P dostaneme práve dôkaz pre ten druhý prípad). Tak táto sekvencia sa aj nutne končí s členom vo frakcii N. Teda susediaca sekvencia Suchých sa začína aj skončí členom vo frakcii P. Teda znova ďalšia sekvencia Mokrých sa začína a končí členom vo frakcií N, atď. Vieme teda, že v každej sekvencii Mokrých je o jedna viac členov N ako P. To teda znamená, že ak sme v začínajúcom stave mali hodnotu invarianty $+i$, tak teraz máme i sekvencií Mokrých. Teraz tieto si vieme triviálne zredukovať na sekvencie dĺžky 1. A potom tieto jednotky si vieme o 2 posúvať, až kým sa nedostaneme do stavu, že všetci Mokrí ľudia stoja na políčkach $1, 3, \cdots 2i - 1$. Toto vieme spraviť, pretože keď máme už iba i ľudí v stave Mokrých, tak oni nutne stoje na pozíciách N (vďaka invariantu). Tak nech je x najmenšie z políčok $1, 3, \cdots 2i - 1$, kde ešte nestojí človek v stave M. Tak si zoberme človeka Mokrého stavu (na pozícii y) pri sekvencii, v ktorej je toto x, a postupne si Mokrého môžeme posúvať o 2 (triviálne si premeníme 2 Suché členy vedľa nášho Mokrého y na Mokrých a potom si zmeníme y a toho prostredného na Suchých). Takto sa z každého stavu s hodnotou i vieme dostať do jedného daného stavu (opísané vyššie), to teda znamená, že náš invariant je naozaj presný. Teda pre párne n máme $n + 1$ možností.

Odpoveď. Pre nepárne n je počet tried 2, pre párne n je táto hodnota $n + 1$.

3.9 Koeficient, Majo a Sušička

opravoval **Mišo**

Zadanie. *Vysušení FKSáci započali valné zhromaždenie. No nemohli hneď riešiť umiestnenie sušičky, keďže Majo si všimol na zemi jeden zabudnutý trojuholník z tých, ktoré vznikli v tretej úlohe. Vo FKS tak znova zavládla panika. A vtedy sa pred nich všetkých postavil ich Hovorca a povedal, že trojuholníku sa báť nemusia, lebo nemôže byť predsa väčší ako k.*

Nájdite najväčšiu reálnu konštantu k takú, že pre každý trojuholník s obsahom S a stranami dlhými a, b, c platí

$$12a^2 + b^2 + c^2 \geq k \cdot S.$$

Pre túto hodnotu k nájdite všetky trojuholníky, pre ktoré nastáva rovnosť.

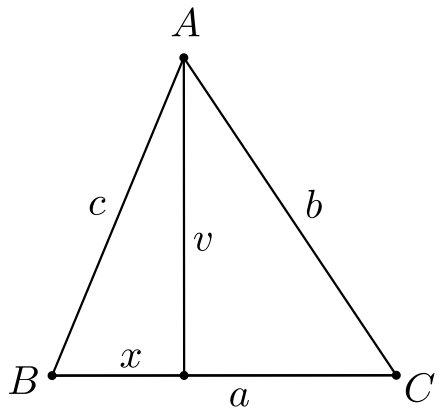
Riešenie

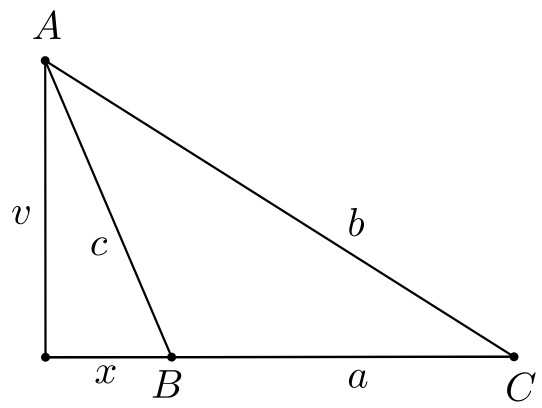
Chceli by sme, aby ľavá strana nerovnosti bola čo najmenšia, zatiaľ čo tá pravá čo najväčšia, pretože tak dosiahneme čo najväčšie obmedzenie na k. Chceli by sme teda nájsť také trojuholníky, pre ktoré je $12a^2 + b^2 + c^2$ čo najmenšie, zatiaľ čo S je čo najväčšie. Trojuholníkov existuje nesmierne veľa, bolo by teda dobré nejakým spôsobom sa obmedziť na tie, ktoré čo najviac minimalizujú ľavú stranu nerovnosti a maximalizujú obsah trojuholníka.

Ukážeme, že zaujímavé sú práve rovnoramenné trojuholníky s $b = c$. Ak sa pozrieme na všetky trojuholníky pre konkrétne a a S, máme pevne danú aj ich výšku na stranu a, ktorá sa dá vypočítať zo vzťahu

$$S = \frac{av_a}{2}.$$

Ďalej budeme používať len výšku na stranu a, takže ju budeme značiť už iba v. Keď máme takto zafixované a a S, ostáva už len minimalizovať $b^2 + c^2$. Oba sčítance vieme vypočítať z Pytagorovej vety.





Nech x označuje vzdialenosť päty výšky na stranu a od jej krajného bodu B. Ak päta leží vnútri strany a alebo je zhodná s niektorým krajným bodom, z Pytagorovej vety platí:

$$b^2 = (a - x)^2 + v^2,$$
$$c^2 = x^2 + v^2.$$

Ak päta neleží vnútri strany a, nech BUNV[6] leží na polpriamke opačnej k BC (ak máme BC vodorovne smerom doprava, tak leží naľavo od B). Prípad, kedy leží napravo od C je symetrický. Potom opäť použijeme Pytagorovu vetu a máme

$$b^2 = (a + x)^2 + v^2,$$
$$c^2 = x^2 + v^2.$$

Vidíme, že sme si vôbec nepomohli, práve naopak. Hodnota b^2 sa zväčšila, namiesto $(a-x)^2$ máme v súčte $(a+x)^2$. Hodnota c^2 sa nezmenila. Keďže chceme $b^2 + c^2$ minimalizovať, tento prípad nebudeme ďalej uvažovať.

Ak je trojuholník rovnoramenný, potom $b^2 = c^2 = v^2 + (\frac{a}{2})^2$. Chceme dokázať, že v tomto prípade je $b^2 + c^2$ najmenšie možné, teda:

[6] bez ujmy na všeobecnosti; značí, že iné prípady skúmať nemusíme, pretože sú podobné

$$((a-x)^2+v^2)+(x^2+v^2) \geq 2\left(v^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right),$$

$$a^2-2ax+2x^2+2v^2 \geq 2v^2+\frac{a^2}{2}.$$

Prenásobíme dvomi:

$$a^2-4ax+4x^2 \geq 0,$$

$$(a-2x)^2 \geq 0.$$

Druhá mocnina vždy bude nezáporná a postupovali sme ekvivalentnými úpravami, takže toto tvrdenie je dokázané. Navyše pre iné x ako $\frac{a}{2}$ rovnosť nenastáva. Stačí uvažovať rovnoramenné trojuholníky. Vyjadrenie b, c a S pomocou a a v teraz dosadíme do pôvodnej nerovnosti a opäť prenásobíme dvomi:

$$12a^2+2v^2+\frac{a^2}{2} \geq k\frac{av}{2},$$

$$25a^2+4v^2 \geq kav,$$

$$25a^2-kav+4v^2 \geq 0.$$

Toto nám nápadne pripomína roznásobenie druhej mocniny rozdielu, konkrétne

$$(5a-2v)^2 = 25a^2-20av+4v^2.$$

Vidíme, že ak zvolíme $k=20$, dostaneme opäť druhú mocninu, ktorá má byť väčšia alebo rovná nule, nerovnosť je splnená. Ak by však k bolo väčšie ako 20, mali by sme

$$25a^2-kav+4v^2 = (5a-2v)^2+20av-kav = (5a-2v)^2+av(20-k) \geq 0,$$

čo už platiť nemusí, stačí ak $(5a-2v)^2$ bude 0 a av kladné.

Hľadané k je teda 20. Rovnosť nastáva vtedy, kedy nastáva v uvedených nerovnostiach, teda $5a=2v$ a $b=c$, čiže

$$b^2=c^2=v^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{5a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{26a^2}{4}.$$

Z toho vyplýva

$$b = c = \sqrt{\frac{13}{2}}a.$$

Pre všetky takéto trojuholníky v zadanej nerovnosti pre $k = 20$ nastáva rovnosť.

3.10 Kráľovná Matfyzu – Sušička

opravoval **Tomáš**

Zadanie. *Na konci dňa to už vyzeralo tak, že FKSáci sa nezhodnú. Adam sušičku vo FKS nechcel. Ale skúste sa hádať s Jarom, ktorý všetkých svojím mocným poradným hlasom presviedča, aby spravili nálet na T2*[7] *a sušičku im zobrali. Jaro pochopiteľne netušil, že sušička sa v tom čase nachádzala v KMSku. Nakoniec celé napätie vyvrcholilo až do bodu, kedy sa Adam rozhodol, že abdikuje z funkcie hlavného vedúceho. No, ale čo teraz? FKSáci možno získajú nazad sušičku, ale nie hlavného vedúceho. Môže sušička zastávať funkciu hlavného vedúceho ?*

Nech $\mathbb{N}$ označuje množinu kladných celých čísel. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že

$$n! + f(m)! \mid f(n)! + f(m!)$$

platí pre všetky $m, n \in \mathbb{N}$.

Riešenie

Dá sa celkom ľahko všimnúť, že funkcia $f(n) = n$ vyhovuje zadaniu a keď sa nám nepodarí nájsť nejaké ďalšie, tak začneme mať podozrenie, že je jediná. Ukážeme, že zadaniu vyhovuje jedine funkcia $f(n) = n$. Tak ako pri funkcionálkach býva zvykom, oplatí sa dosadiť na začiatok nejaké malé čísla, začneme s $n = 1$, $m = 1$,

$$1 + f(1)! \mid f(1)! + f(1),$$

$$1 + f(1)! \mid f(1)! + f(1) - (1 + f(1)!),$$

$$1 + f(1)! \mid f(1) - 1.$$

Keďže $f(1) - 1$ je nezáporné, je to buď 0, alebo $f(1) - 1 \geq 1 + f(1)!$. Druhá možnosť nemôže nastať, lebo $f(1)! \geq f(1)$. Preto platí prvá možnosť $f(1) - 1 = 0$, $f(1) = 1$.

Dosaďme ďalej len $m = 1$,

$$n! + 1 \mid f(n)! + 1. \tag{1}$$

Z tejto deliteľnosti máme $f(n)! \geq n!$. Keďže faktoriál je rastúca funkcia, tak z toho vyplýva $f(n) \geq n$.

Pokúsme sa z (1) dokázať, že $f(n) = n$. Nepodarí sa nám to zatiaľ pre všetky n, ale len pre $n = p - 1$, kde p je prvočíslo. Keby bolo $f(n) > n$ (vieme už, že $f(n) \geq n$), tak v (1) by $f(n)!$ bolo deliteľné číslom $n + 1$, teda pravá strana by nebola deliteľná $n + 1$. V prípade $n = p - 1$,

$$(p - 1)! + 1 \mid f(p - 1)! + 1$$

[7] Miestnosť KSPákov

to znamená, že pravá strana by nebola deliteľná p. Teraz si spomenieme na Wilsonovu vetu, ktorá hovorí, že $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, kde p je prvočíslo, teda $p \mid (p-1)! + 1$. Keďže p delí ľavú stranu deliteľnosti, tak p musí deliť aj pravú stranu. To je však v spore s povedaným vyššie. Preto $f(p-1) = p-1$ pre všetky prvočísla p.

Vráťme sa k pôvodnej deliteľnosti,

$$\begin{aligned} n! + f(m)! &\mid f(n)! + f(m!), \\ n! + f(m)! &\mid f(n)! + f(m!) - (n! + f(m)!), \\ n! + f(m)! &\mid (f(n)! - n!) + (f(m!) - f(m)!). \end{aligned} \tag{2}$$

Zafixujme si m a za n dosádzajme do (2) ľubovoľné $p-1$. Zátvorka $(f(p-1)! - (p-1)!)$ bude vždy 0 a zátvorka $(f(m!) - f(m)!)$ je konštantná, lebo m sa nemení. Pravá strana deliteľnosti je konštantná, teda má len určitú konečnú ohraničenú množinu deliteľov, okrem prípadu, že 0 má nekonečne veľa deliteľov. Avšak ľavá môže byť ľubovoľne veľká – člen $(p-1)!$ je ľubovoľne veľký, lebo prvočísel je nekonečne veľa. To môže nastať, len keď pravá strana je 0, čiže $(f(m!) - f(m)!) = 0$. Pre všetky m platí $f(m!) = f(m)!$.

Teraz si zafixujme n a za m dosádzajme do (2) ľubovoľne veľké čísla. Zátvorka $(f(m!) - f(m)!)$ je 0, pravá strana deliteľnosti je konštanta $(f(n)! - n!)$, ale ľavá strana môže byť ľubovoľne veľká kvôli členu $f(m)!$. Preto $(f(n)! - n!) = 0$, čiže $f(n)! = n!$. Keďže faktoriál je rastúci, tak keď sa rovnajú dva faktoriály, tak sa rovnajú aj argumenty $f(n) = n$. Premennú n sme mohli zafixovať na ľubovoľnej hodnote, takže sme dokázali, že pre všetky n platí $f(n) = n$, čo je jediná vyhovujúca hľadaná funkcia.