



Riešenia 1. kola zimnej časti

1.1 Korigujem Metriky Sprchy ($\kappa \leq 1$)

Zadanie. David má veľmi špecifické požiadavky na svoju sprchu. Veľmi mu záleží na životnom prostredí, ale aj na osobnom komforte, a teda požaduje od sprchy prietok $28 \frac{1}{\text{min}}$ a teplotu $29,5^\circ\text{C}$. Na svojom výlete do Blagoevgradu narazil na problém. Po tom, čo s ostatnými Slovákami prišli na internát, kde boli ubytovaní, všimli si, že sprcha mala len kohútiky s teplou vodou o teplote 38°C a studenou o teplote 10°C . David zároveň vypožoroval, že otočením studeného kohútika o 10° zvýši prietok o $0,5 \frac{1}{\text{min}}$ a otočením teplého o 15° o $1 \frac{1}{\text{min}}$. Takisto si všimol, že zvýšenie prietoku je priamo úmerné otočeniu kohútika. Ako má David otočiť dané kohútiky, aby dosiahol požadované parametre?

Poznámka. Môžete predpokladať, že výsledná teplota vody bude váženým priemerom pôvodných teplôt.

Riešenie. opravujú David (david.belobrad@trojsten.sk) a Filip K. (filip.kotoc@trojsten.sk)

Na začiatok si označme relevantné údaje ich skrátenými názvami:

výsledný prietok sprchy: $Q^* = 28 \frac{1}{\text{min}}$ prietok teplej vody: Q_t prietok studenej vody: Q_s
výsledná teplota sprchy: $t^* = 29,5^\circ\text{C}$ teplota teplej vody: $t_t = 38^\circ\text{C}$ teplota studenej vody: $t_s = 10^\circ\text{C}$

Pre prehľadnosť vo vzorovom riešení nebudeme uvádzať jednotky. Vieme určite povedať, že súčet prietokov Q_t a Q_s budú určite dávať celkový prietok Q^* , teda že

$$Q_t + Q_s = Q^* = 28.$$

Zároveň t^* vieme spočítať ako vážený aritmetický priemer nasledujúcim spôsobom:

$$29,5 = t^* = \frac{Q_t \cdot t_t + Q_s \cdot t_s}{Q_t + Q_s} = \frac{Q_t \cdot t_t + Q_s \cdot t_s}{Q^*} = \frac{Q_t \cdot 38 + Q_s \cdot 10}{28}.$$

Všimnime si, že sme tak dostali sústavu rovníc o 2 neznámých. Poďme ju teda vyriešiť.

$$Q_t + Q_s = Q^* = 28 \Leftrightarrow Q_s = 28 - Q_t.$$

Takto získané vyjadrenie jednej z premenných môžeme dosadiť do druhej rovnice. Dostaneme tak, že

$$29,5 = \frac{Q_t \cdot 38 + (28 - Q_t) \cdot 10}{28} = \frac{38 \cdot Q_t + 280 - 10 \cdot Q_t}{28} = \frac{28 \cdot Q_t + 280}{28} = Q_t + 10$$

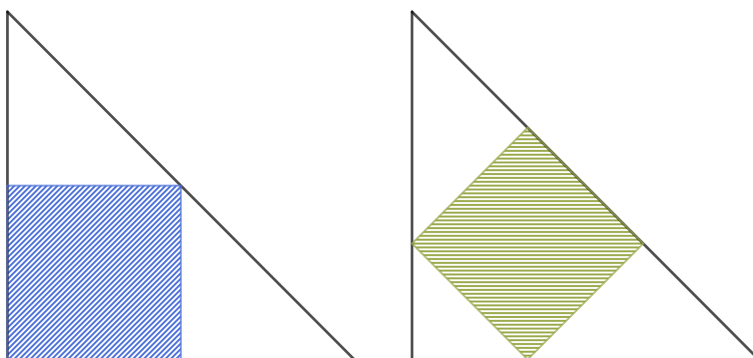
Potom $Q_t = 29,5 - 10 = 19,5 \frac{1}{\text{min}}$, a teda $Q_s = 28 - Q_t = 28 - 19,5 = 8,5 \frac{1}{\text{min}}$. Všimnime si, že otočenie studeného kohútika o 10° mení prietok len o $0,5 \frac{1}{\text{min}}$, teda otočenie o 20° bude meniť prietok už o celý liter za minútu. Keďže už poznáme prietok teplého a aj studeného kohútika, tak za použitia údajov o rotácii vieme vypočítať, o koľko stupňov má David otočiť kohútikmi.

Otočenie kohútika s teplou vodou: $15 \cdot Q_t = 15 \cdot (19,5 : 1) = 292,5^\circ$.

Otočenie kohútika so studenou vodou: $20 \cdot Q_s = 20 \cdot (8,5 : 1) = 170^\circ$.

1.2 Krásne Máme Servítky ($\kappa \leq 2$)

Zadanie. Keď sa David osprchoval, išiel sa so svojou partiou naraňajkovať do najbližšej Blagovgradskej jedálne. Kým čakali na svoje jedlo, Nina si všimla, že na stole stojí jedna modrá a jedna zelená váza, pričom obe majú štvorcovú podstavu. Taktiež boli na stole dve servítky zložené do zhodných rovnoramenných pravouhlých trojuholníkov. Jednotlivé vázy sa dali na tieto servítky položiť tak, ako na obrázku 2.1. Ďalej Nina zistila, že podstava väčšej vázy má stranu dlhú 21 cm. Vedeli by ste z toho zistiť, ako veľkú stranu mala podstava menšej vázy?

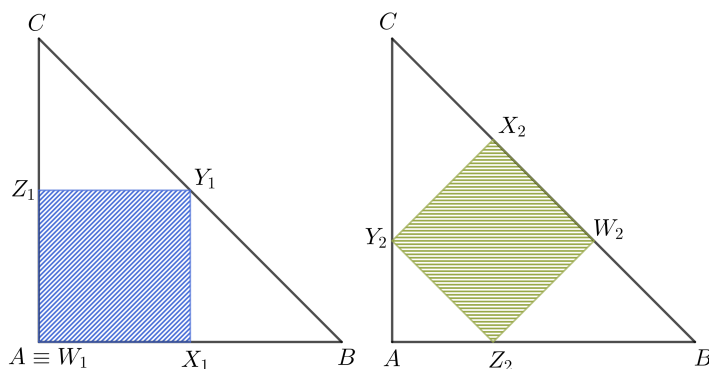


Obrázok 2.1: Poloha váz na servítkke

Riešenie.

opravuje **Lukáš** (lukas.gaborik@trojsten.sk)

Nazvime si našu trojuholníkovú servítku ako ABC a dĺžku jej strany AB označme ako a , modrú vázu ako $W_1X_1Y_1Z_1$ a zelenú vázu ako $W_2X_2Y_2Z_2$.



Na začiatok sa pozrime na modrú vázu. Keďže $\angle ABC$ a $\angle X_1BY_1$ je ten istý uhol a $|\angle BAC| = |\angle BX_1Y_1| = 90^\circ$, tak trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle X_1BY_1$ sú podobné. Preto aj trojuholník $\triangle X_1BY_1$ je rovnoramenný, čiže $|BX_1| = |X_1Y_1|$. O váze ale vieme, že je štvorcová, čiže $|AX_1| = |W_1X_1| = |X_1Y_1|$. Dokopy z toho dostávame, že $|AX_1| = |X_1Y_1| = |BX_1|$, a teda, že X_1 je stredom úsečky AB . Potom už ale jasne vidíme, že strana modrého štvorca je $m = \frac{a}{2}$.

Teraz sa poverujme zelenej váze. Keďže $\angle ABC$ a $\angle W_2BZ_2$ je ten istý uhol a $|\angle BAC| = |\angle BW_2Z_2| = 90^\circ$, tak trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle W_2BZ_2$ sú podobné. To ale znamená aj, že trojuholník $\triangle W_2BZ_2$ je rovnoramenný, čiže $|BW_2| = |W_2Z_2|$. Rovnakým postupom na opačnom konci trojuholníka ABC sa vieme presvedčiť, že $|CX_2| = |X_2Y_2|$.

Z toho, že váza je štvorec, ďalej vieme $|W_2Z_2| = |W_2X_2| = |X_2Y_2|$. Teraz však môžeme použiť naše rovnoramenné trojuholníky, z čoho dostaneme, že $|BW_2| = |W_2X_2| = |CX_2|$, čiže W_2, X_2 nám úsečku BC rozdeľujú na tretiny. Aká je však jej dĺžka? Úsečka BC je preponou v pravouhlom rovnoramennom trojuholníku ABC s dĺžkou odvesny a . Môžeme teda použiť Pytagorovu vetu, z ktorej dostaneme

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \implies |BC| = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a.$$

Nuž a keďže W_2X_2 tvorí tretinu úsečky BC , tak strana zeleného štvorca je $z = \frac{\sqrt{2}}{3}a$.

Stále však nevieme, ktorá z váz má dlhšiu stranu. Zistíme to tak, že si ich dáme do nerovnosti, v ktorej nepoznáme znamienko, a tú budeme ekvivalentnými úpravami upravovať až do momentu, kedy to budeme vedieť určiť.

$$\begin{aligned} m &\stackrel{?}{\leq} z, \\ \frac{a}{2} &\stackrel{?}{\leq} \frac{\sqrt{2}}{3}a, & / \div a \\ \frac{1}{2} &\stackrel{?}{\leq} \frac{\sqrt{2}}{3}, & / ^2 \\ \frac{1}{4} &\stackrel{?}{\leq} \frac{2}{9}, & / \cdot 36 \\ 9 &> 8. \end{aligned}$$

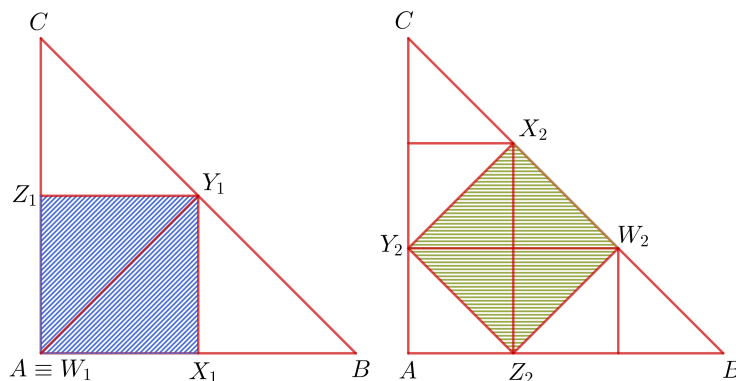
Tu ešte treba zdôrazniť, že umocnenie je ekvivalentnou úpravou preto, že obe strany nerovnosti sú kladné. Ak by niektorá z nich bola záporná, umocnenie nám jej platnosť vie pokaziť (napr. $-3 < 2$ by sme dostali $9 < 4$, čo očividne neplatí).

Dostali sme teda, že modrá váza je väčšia. Preto platí $21 \text{ cm} = m = \frac{a}{2}$, z čoho máme, že $a = 42 \text{ cm}$. Strana menšej vázy je potom ale $z = \frac{\sqrt{2}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 42 \text{ cm} = 14\sqrt{2} \text{ cm}$.

Poznámka

Viacerí z vás ste automaticky prehlásili, že modrá váza je väčšia ako zelená (resp. že modrá váza má stranu dlhú ako 21 cm) bez toho, aby ste to zdôvodnili. V zadaní však toto nijak zaručené nebolo. To, že ako prvá bola v zadaní spomenutá väčšia váza a na obrázku bola prvá (t. j. naľavo) modrá váza, ešte neznamená, že modrá **musí** byť väčšia. Pokojne sme ten obrázok mohli dať aj naopak. Potom by asi oveľa väčšiemu počtu z Vás vyšiel nesprávny výsledok.

Ešte by som rád spomenul iný postup, ako ukázať, že modrá váza je väčšia. Tento postup použili niektoré z riešení a prišiel mi zaujímavý. Vezmeme si servítku a rozdelíme si ju na menšie trojuholníky ako na obrázku 2.2. Potom vidíme, že modrá váza tvorí $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ obsahu servítky a zelená zas $\frac{4}{9}$ obsahu servítky. Keďže ale $\frac{1}{2} > \frac{4}{9}$, modrá váza je väčšia.



Obrázok 2.2: Servítiky rozdelené na menšie trojuholníky

1.3 Kopa Matematikov Sedí ($\kappa \leq 3$)

Zadanie. Po výdatných raňajkách sa všetci presunuli na otvárací ceremoniál. Jednými zo súťažiacich boli aj Izraelčania, ktorých bolo tento rok hojne. Ich delegácia pozostávala z 25 členov, pričom každý mal svoj unikátny dres s číslom od 1 po 25. Keď prišli na ceremoniál, sadli si na ľavý kraj prázdneho radu s n sedadlami tak, že ich čísla boli usporiadané vzostupne zľava doprava. Potom však zistili, že pri predstavovaní ich budú vyvolávať sprava doľava, a preto sa chceli presadiť tak, aby sedeli tesne vedľa seba, ale zľava doprava zostupne. Aby to nebolo také nudné, rozhodli sa premiestňovať tak, že v každom kroku sa niektorý Izraelčan buď posunie o 1 sedadlo doprava, ak je voľné, alebo prekročí človeka sediaceho tesne napravo a sadne si na nasledujúce sedadlo, ak je voľné. Kým predseda komisie Johnny rozprával o histórii Blagogradu, Majo sa z nudy zamyslel nad tým, či sa to Izraelčanom takto vôbec môže podariť. Nájdite najmenšie n , pre ktoré si Izraelčania v rade s n sedadlami takto presadnúť.

Riešenie. opravujú **Baška** (barbora.javorova@trojsten.sk) a **Adri** (adrianka.janackova@trojsten.sk)

Najprv si uvedomíme, že n musí byť najmenej 49. Žiaden z Izraelčanov sa nemôže posunúť doľava, teda Izraelčan s číslom 25 musí určite zostať na svojom mieste alebo sa posunúť doprava. Ak by zostal na svojom mieste tak budeme potrebovať ďalších 24 miest pre ostatných, teda spolu 49 miest. Ak by sa posunul doprava, tak by sme potrebovali navyše počet miest, o ktoré sa posunul a ešte 24 navrch.

Skúsme sa teda pozrieť či by sa boli schopní preusporiadať, ak by sa 25. Izraelčan nepohol. Jediný pohyb, ktorý vedie podľa pravidiel spraviť, je poslať Izraelčana číslo 24 na 26. miesto. Potom im ostávajú dve možnosti:

- 24. Izraelčan zostane na 26. mieste
- 24. Izraelčan sa posunie doprava na 27. miesto.

Ak by nastala prvá možnosť, tak spolu s 25. Izraelčanom by vytvorili „dvojblok“, ktorý by Izraelčania s menším číslom neboli schopní prekonať. V druhej možnosti by Izraelčania s číslami 1 až 23 museli sedieť napravo od neho, a teda by zaberali ďalších 23 miest – teda v súčte 50. Resp. by sa 25. Izraelčan musel niekedy posunúť doprava.

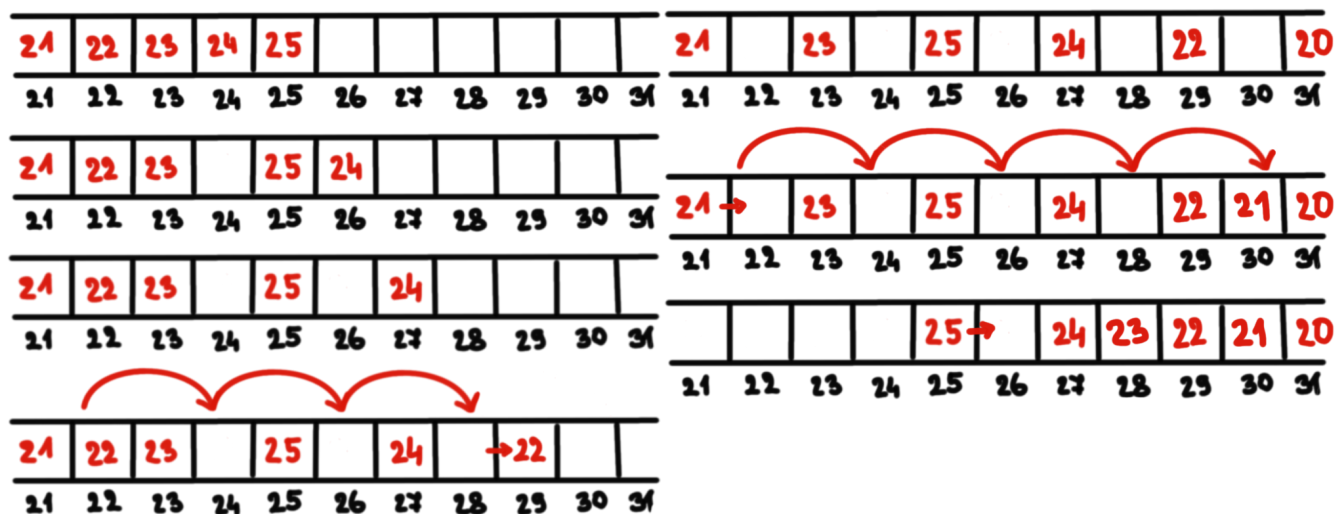
Teda sme práve ukázali, že miest musí byť viac ako 49.

Skúsme sa teraz pozrieť, či by to náhodou nefungovalo pre 50 miest. Prvý pohyb zostáva rovnaký, teda presunieme 24. Izraelčana na 26. miesto, teraz však presunieme 24. Izraelčana na 27. miesto, aby sme vytvorili prechod pre menšie čísla. A zároveň je 24. Izraelčan už na svojom mieste.

Takto sa postupne popresúvajú všetci páрни Izraelčania od najväčšieho po najmenšieho (Izraelčan s číslom $24 - 2k$ sa presunie na miesto $27 + 2k$ pre $0 \leq k \leq 11$). Uvedomme si, že od Izraelčana s párnym číslom, ktorým aktuálne chceme pohnúť, sa napravo nachádzajú len doposiaľ nepohnutí Izraelčania s nepárnymi číslami (a teda aj pozíciami) a Izraelčania s párnymi číslami, ktorí sa pohli na pozície s nepárnymi číslami. Čiže všetky pozície s párnymi číslami sú voľné, a preto nami vybraný Izraelčan vie cez ne preskakať až na svoje miesto.

Potom sa presúvajú všetci nepární Izraelčania od najmenšieho po najväčšieho (Izraelčan s číslom $2k + 1$ sa presunie na miesto $50 - 2k$ pre $0 \leq k \leq 12$). Opäť si môžeme uvedomiť, že Izraelčan sa tam vie popresúvať, lebo všetci Izraelčania od jeho pôvodnej až po jeho finálnu pozíciu sa nachádzajú na nepárnych pozíciách.

Postup je ilustrovaný na obrázku 3.1.



Obrázok 3.1: Vizualizácia presunov pre 50 miest

Vyššie uvedenou konštrukciou postupných presunov Izraelčanov sme ukázali, že pre 50 miest v rade sa vedía Izraelčania popresúvať tak, aby spĺňali podmienky zo zadania. Keďže sme ukázali, že pre menej ako 50 miest v rade sa Izraelčania nevedia popresúvať tak, aby spĺňali podmienky zo zadania, tak 50 je najmenšie možné n , pre ktoré sa Izraelčania vedía popresúvať podľa zadania.

1.4 Končiteľa Musím Skúmať ($\kappa \leq 5$)

Zadanie. Každý dobrý otvárací ceremoniál sa končí veľkou hostinou. V Blagorade sa vždy na hostinách podávajú koláče. David si všimol, že počty koláčov na jednotlivých podnosoch spĺňajú zaujímavé vlastnosti.

Zvoľme si kladné celé číslo n . Cifru c nazveme končiteľom čísla n , ak existuje deliteľ čísla n , ktorého posledná cifra je c . Napríklad číslo 156 má končiteľa 1, 2, 3, 4, 6, 8 a 9.

1. Nájdite najmenšie zložené číslo, ktoré má práve jeden končiteľ.
2. Ukážte, že číslo, ktoré má končiteľa 0 a 9, musí mať aspoň štyri ďalšie rôzne končiteľa.
3. Nájdite najmenšie číslo, ktoré má práve 10 končiteľov.

Riešenie.opravuje **Kaja** (karolina.pisonova@trojsten.sk)

Najskôr si musíme uvedomiť, že každé číslo je deliteľné číslom 1. Preto, ak má mať nejaké číslo práve jeden končiteľ, musí ním byť 1. Aby bolo číslo zložené, musí byť násobkom aspoň dvoch čísel, ktoré sú rôzne od 1. Aby sme nezískali končiteľa rôzne od 1, tak musí byť naše hľadané číslo násobkom iba čísel končiacich cifrou 1. Najmenšie číslo, ktoré končí cifrou 1 a je rôzne od 1, je 11. To je ale prvočíslo. Preto najmenšie zložené číslo, ktoré má práve jeden končiteľ, je číslo $11 \cdot 11 = 121$.

Ak má číslo končiteľ 0, tak musí byť deliteľné číslom 10, a teda aj číslami 2 a 5, čo vyplýva z pravidiel deliteľnosti pre 2 a 5. Ak je teda číslo deliteľné dvomi a nejakým číslom, ktoré končí cifrou 9, tak bude deliteľné aj ich spoločným násobkom, ktorý bude končiť cifrou 8. A ako sme už povedali, 1 je končiteľom každého čísla, preto číslo s končiteľmi 0 a 9 bude mať ešte aspoň končiteľa 1, 2, 5 a 8.

To, že má číslo práve 10 končiteľov znamená, že má všetky možné končiteľa od 0 po 9. Aby malo končiteľa 0, musí byť toto číslo deliteľné číslom 10, vďaka čomu bude zároveň deliteľné číslami 2 a 5 (a 1 ako každé číslo). Preto naše hľadané číslo bude mať určite v prvočíselnom rozklade $2 \cdot 5$. To by sme teda mali vybavené končiteľa 0, 1, 2 a 5. Keďže má mať aj končiteľ 9, tak podľa predchádzajúcej podúlohy bude mať automaticky aj končiteľ 8, takže ten nepotrebujeme riešiť. Podobne, ak bude mať končiteľa 2 a 7, tak bude mať aj končiteľ 4, a ak bude mať číslo končiteľa 2 a 3, tak bude mať aj končiteľ 6, preto nám stačí nájsť najmenšie také číslo, ktoré bude mať ešte končiteľa 3, 7 a 9. Pri ich získavaní nám nijak nepomôže to, že už máme $2 \cdot 5$, pretože pri násobení ľubovoľného čísla dvomi získame iba párne končiteľa a pri násobení ľubovoľného čísla piatimi vieme dostať iba končiteľa 0 a 5, ktoré už ale máme. Takže pridávať budeme iba nepárnych prvočiniteľov rôznych od 5. Ďalšia vec, ktorá nám pomôže je, že pri násobení dvoch alebo viacerých čísel, posledná cifra súčinu závisí iba od posledných cifier jeho činiteľov. Preto keď sa pozrieme na prvočíselný rozklad hľadaného čísla, určite tam nechceme pridávať čísla, ktoré majú viac cifier, lebo by sa dali nahradiť menšími prvočíslami (prvočísla končiace 3 a 7 vieme priamo nahradiť 3 a 7, prvočísla končiace 9 vieme nahradiť $3 \cdot 3$, čo dáva menší súčin ako ľubovoľné prvočíslo končiace cifrou 9). Takže z toho vyplýva, že budeme pridávať už len 3 a 7. Pridaním iba jedného ďalšieho prvočiniteľa by sme získali maximálne 2 nové končiteľa, a to končiteľ pridaného prvočísła a končiteľ jeho dvojnásobku. Takže potrebujeme pridať aspoň 2 prvočinitele. Na to máme možnosti:

- $3 \cdot 3$ - pribudnú nám nepárne končiteľa 3 a 9, stále nám ale chýba 7

- $3 \cdot 7$ - pribudnú končiteľa 3 a 7, ale stále chýba 9

- $7 \cdot 7$ - pribudnú končiteľa 7 a 9, ale stále chýba 3

Preto potrebujeme pridať aspoň 3 prvočinitele. Najmenšia možnosť je pridať $3 \cdot 3 \cdot 3$, čím získame aj končiteľ 3 (samotná 3), aj končiteľ 9 ($3 \cdot 3$), aj končiteľ 7 ($3 \cdot 3 \cdot 3$). Ako sme si už skôr povedali, vďaka tomu získame aj všetky chýbajúce párne končiteľa, teda sme našli najmenšie číslo, ktoré má práve 10 končiteľov, a je ním číslo $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 270$.

1.5 Kolektív Márne Stratených ($\kappa \leq 8$)

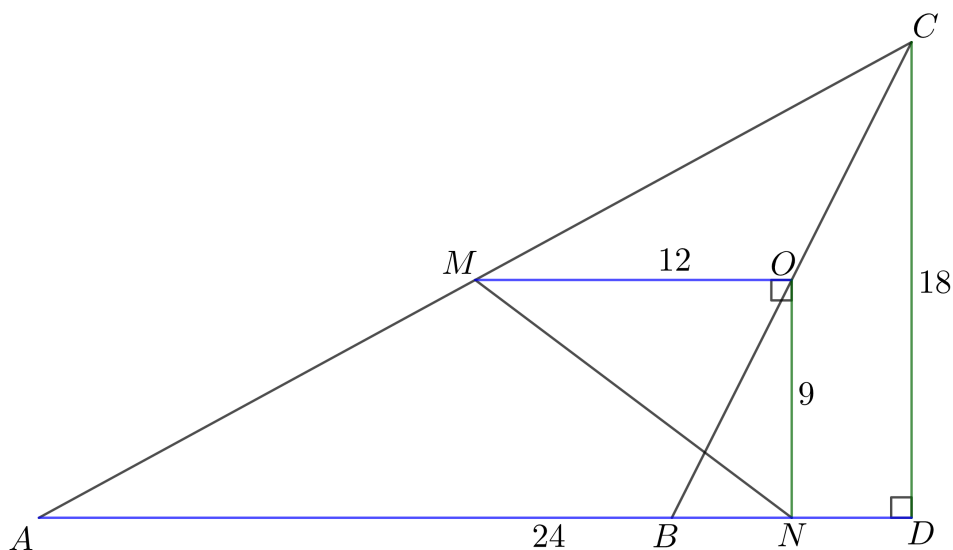
Zadanie. Po ceste z internátov na univerzitu sa Slovákom (prekvapivo?) podarilo stratíť. Keďže ulice Blagordu sa hemžia nebezpečnými mačkami a psami, chcel sa slovenský tím čo najskôr dostať do bezpečia. Miestny Blagordčan im však dal iba hmlisté inštrukcie. Namiesto priamej cesty ich poslal do päty kolmice na kostolnú cestu a odtiaľ 18 krokov doľava a potom 24 doprava. Chudáci Slováci museli vyriešiť jednu úlohu ešte pred samotným súťažným dňom, aby sa ho vôbec mohli zúčastniť.

V trojuholníku ABC označme ako D päť výšky na stranu AB . Nech M je stred strany AC a N je stred úsečky BD . Vieme, že $|AB| = 24$ a $|CD| = 18$. Určte $|MN|$.

Riešenie. opravujú **Timka** (timea.jakubocytova@trojsten.sk) a **Jirka** (jirka.szotkowski@trojsten.sk)

V tejto úlohe bolo asi najťažšie začať. Zadané máme dĺžky dvoch úsečiek, ktoré sú na seba kolmé. Avšak máme zistiť dĺžku úsečky, ktorá s nimi na prvý pohľad až tak nesúvisí. Vieme však, že jej krajné body sú stredy nejakých úsečiek. Práve tieto stredy by nás mohli naviesť na použitie stredných priečok.

Dokreslíme si teda stred strany BC , označme ho O . Potom úsečka MO je stredná priečka v trojuholníku ABC a úsečka NO je stredná priečka v trojuholníku BDC . O stredných priečkach je známe, že sú rovnobežné s príslušnou stranou trojuholníka a majú polovičnú dĺžku. Ľahko teda dopočítame, že $|MO| = 12$ a $|NO| = 9$. Navyše, priamky AB a DC sú na seba kolmé, a preto sú aj priamky MO a NO na seba kolmé. Premyslite si, že to ozaj platí, keď máme zadaný akýkoľvek trojuholník ABC (špeciálne ak je to tupouhlý trojuholník s tupým uhlom pri vrchole A alebo B).



Teraz si už len stačí všimnúť, že trojuholník MNO je pravouhlý, pričom poznáme dĺžky jeho odvesien. Z Pytagorovej vety potom dostaneme, že strana MN má dĺžku 15.

1.6 Kam Mačka Skočí?

Zadanie. Ako si tak Slováci prichádzajú na Blaordskú univerzitu, začujú za sebou dajaké pazvuky. V strachu sa obzerajú okolo seba, či na nich náhodou nevyskočí agresívna mačka, no jediné zviera navôkol je plyšová vydra. Usalašili sa tu totiž starí známi Izraelčania, ktorí si ako prípravu pred súťažou prechádzajú nasledovnú úlohu.

Nech pre každé prirodzené číslo n je a_n prirodzené číslo najbližšie k $\sqrt{n}$ (ak je takých viac, vezmeme vždy to najmenšie; ak je $\sqrt{n}$ prirodzené, tak $a_n = \sqrt{n}$). Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n^2+n} = 2 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2).$$

Riešenie. opravujú **Mimi** (matej.hanus@trojsten.sk) a **Andy** (martin.andricik@trojsten.sk)

Žiadanú rovnosť dokážeme indukciou. Najprv ju overíme pre n rovné 1, potom ukážeme, že z platnosti tvrdenia pre $n - 1$ vyplýva platnosť pre n .

V prvom prípade naozaj

$$a_1 + a_{1^2+1} \stackrel{?}{=} 2 \cdot 1^2,$$

$$1 + 1 = 2.$$

Pre indukčný krok predpokladajme, že

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n^2-n} = 2 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2).$$

Totíž, $(n-1)^2 + n - 1 = n^2 - 2n + n - 1 = n^2 - n$. Potom chceme, aby platila rovnosť zo zadania – stačí nám teda dokázať, že

$$a_{n^2-n+1} + \dots + a_{n^2+n} = 2 \cdot n^2.$$

Žiadanú rovnosť potom dostaneme ako súčet posledných dvoch (chceme, aby prírastok súčtu naľavo bol rovný prírastku súčtu napravo). Najnovšia ľavá strana má všetky členy rovné n . Môžeme si totiž spočítať, že $(n-1/2)^2 = n^2 - n + 1/4$, čo znamená, že pre všetky k väčšie než $n^2 - n + 1/4$ platí $a_k \geq n$. Obdobne $(n+1/2)^2 = n^2 + n + 1/4$ a odtiaľ $a_k \leq n$, akonáhle $k < n^2 + n + 1/4$. Indexy na ľavej strane našej rovnosti sú skutočne všetky medzi týmito hranicami (pretože $n^2 - n + 1/4 < n^2 - n + 1 < n^2 + n < n^2 + n + 1/4$). Je ich tam $(n^2 + n) - (n^2 - n + 1) + 1 = 2n$, čo určuje, že ich súčet je $2n \cdot n = 2n^2$. Indukčný krok a celý dôkaz sú dokončené.

1.7 Konceptov Míňame Spústu

Zadanie. Po piatich hodinách krkolomného počítania sa David, Lukáš a Teri potrebovali zbaviť svojich šmirákov, a keďže ešte nemali dosť rozmýšľania, zahrali sa takúto hru.

Na začiatku má každý hráč v ruke jeden šmirák a pred nimi je kôpka n šmirákov, kde n je kladné celé číslo. Vo svojom ťahu môže hráč pridať jeden šmirák (ak má nejaký v ruke) do kôpky alebo si z kôpky (ak tam nejaký je) vziať jeden do ruky. Hráč, ktorý vezme z kôpky posledný šmirák, vyhráva. Začína David a potom sa striedajú do kruhu postupne s Lukášom a Teri. Navyše sa Lukáš a Teri spojili a dohodli sa, že budú hrať tak, aby vyhral určite niekto z nich. Pre ktoré n

- dokáže David vyhrať bez ohľadu na to, ako hrajú Lukáš s Teri?
- David nevie síce zaručene vyhrať, ale vie aspoň zabezpečiť, aby Lukáš s Teri nevyhrali po konečnom počte ťahov (teda aby hra trvala donekonečna, ak budú Lukáš s Teri hrať optimálne)?
- vedia Lukáš s Teri vždy poraziť Davida?

Ukážte tiež, ako má/majú v danej situácii postupovať.

Po hre (ak niekedy tá hra skončí) si Slováci plánujú pozrieť psami a mačkami sa hemžiace centrum Blordu.

Riešenie. opravujú **Mišo M.** (michal.molnar@trojsten.sk) a **Mati** (matus.zelko@trojsten.sk)

Odbíme si na začiatok víťazné pozície. Ak bude pred Davidovým ťahom na kôpke len 1 šmirák, David ho vezme a vyhrá. To napríklad znamená, že pre $n = 1$ vyhráva on. Naopak, ak po jeho ťahu budú na kôpke 1 alebo 2 šmiráky, Lukáš si šmirák vezme, a ak na kôpke nejaký ostal, vezme si ho Teri. Vyhrá teda niekto z nich. Pre jednoduchosť budeme hovoriť, že v takejto situácii David prehral.

Predchádzajúci odsek nám dáva ešte jedno pozorovanie. Ak pred Davidovým ťahom sú na kôpke 2 alebo 3 šmiráky, David musí šmirák na kôpku pridať. Inak by na kôpke ostali menej ako tri šmiráky a prehral by.

Čo ďalej? Zatiaľ sme úlohu vyriešili len pre $n = 1$. Po chvíli rozmýšľania prideme na to, že pre $n = 2$ David prehrá. Na začiatku musí šmirák pridať na kôpku a keď Lukáš 1 šmirák pridá a Teri 1 odoberie, budú pred Davidom 3 šmiráky. Podľa postupu vyššie by mal šmirák na kôpku pridať, no v ruke žiaden nedrží. Šmirák teda z kôpky odoberie a prehrá.

Situácia pre $n = 2$ nám čo-to napovedá o situácii pre vyššie počty šmirákov. Vidíme, že Lukášovi s Teri sa oplatí znížiť počet šmirákov na kôpke na 2 alebo 3 a následne sa pokúsiť Davida obrať o šmiráky na ruke. Tým by si mohli zaistiť, že vyhrá niekto z nich.

Časť so snižovaním počtu šmirákov na kôpke je jednoduchá. Ak sú po Davidovom ťahu na kôpke aspoň 4 šmiráky, Lukáš aj Teri si po jednom vezmú. Bez ohľadu na to, čo spravil David, bude pred jeho ďalším ťahom na kôpke aspoň o 1 šmirák menej než minule. Keďže na kôpke boli po Davidovom ťahu aspoň 4 šmiráky, pred jeho najbližším ťahom budú aspoň 2. Najviac po $n - 3$ kolách teda Lukáš s Teri dosiahnu 2 alebo 3 šmiráky na kôpke. Ak to bude pred ich ťahom, tak pre 2 šmiráky rovno vyhrá jeden z nich. Pre 3 šmiráky zas vie jeden z nich šmirák pridať a druhý odobrať, čím dostanú 3 šmiráky pred Davidovým ťahom. Tu sa oplatí ešte spomenúť, že to naozaj vedia spraviť. Keďže doteraz šmiráky len brali, určite má niekto z nich¹ na ruke šmirák, ktorý na kôpku môže položiť. Ten druhý šmirák vezme.

¹V tomto prípade majú šmiráky dokonca obaja.

Takže vieme, že Lukáš s Teri určite vedia po konečnom počte ťahov zabezpečiť, že pred Davidovým ťahom sú na kôpke 2 alebo 3 šmiráky. Lahko si všimneme, že Davida vedia v tomto stave udržiavať ľubovoľne dlho. Aby David neprehral, musí šmirák na kôpku pridať, čím pred Lukášom s Teri budú 3 alebo 4 šmiráky. V druhom prípade si každý vezme 1 šmirák a pred Davidom budú 2. V prvom prípade vie jeden z nich šmirák na kôpku dať a druhý odtiaľ vziať (nie nutne v tomto poradí). Pred Davidovým ťahom tak budú 3 šmiráky.

Takže pred Davidovým ťahom budú na kôpke striedavo 2 a 3 šmiráky. V každom ťahu teda musí jeden šmirák z ruky dať na kôpku. Keď sa prvýkrát ocitol v tomto cykle, mal obmedzený počet šmirákov na ruke. Označme tento počet d . Po d ťahoch, v ktorých bol prinútený dať šmirák na kôpku, mu v ruke žiaden nezostane. Bude si teda musieť jeden z 2, resp. 3, šmirákov zobrať a prehrať. Jedinou jeho nádejou by bolo, ak by sa mu podarilo prinútiť Lukáša s Teri prerušiť cyklus. Zo 4 šmirákov si vedia zobrať dva vždy. Na to, aby si nemohli jeden šmirák zobrať a druhý šmirák na kôpku priložiť, museli by byť obaja bez šmirákov. To však nastať nemôže. V každom ťahu doteraz si totiž aspoň jeden z nich šmirák vzal. Ten, kto si šmirák vzal v minulom kole, ho isto môže v tomto položiť na kôpku. David teda s prehrou nič nenarobí.

Odpoveď

Pre $n = 1$ vyhráva David tým, že hneď na začiatku zoberie jediný šmirák z kopy. Pre $n > 1$ vyhrávajú Lukáš s Teri. Ich stratégia sa odvíja od počtu šmirákov na kope po Davidovom ťahu. Ak sú tam 3, jeden z nich si šmirák vezme a druhý šmirák na kôpku dá. Ak sú na kôpke 2 alebo aspoň 4, obaja si šmirák zoberú. Ak je na kôpke 1 šmirák, vezme si ho Lukáš a hra skončí.

1.8 Kde Majó Sedí?

Zadanie. Keď sa po prehliadke Bordu Slováci vrátili na internát, rozhodli sa, že si zahrajú spoločenské hry. Vyšli teda na chodbu a sadli si na kružnicu okolo stola. Potom si však všimli, že okolo stola na druhom konci chodby tiež na kružnici sedí nejaká skupinka. Rozhodli sa teda riadiť slovami klasika „Čím viac, team viac“ a kružnice spojili. Majó si všimol, že nech na kružnici sedel kdekôľvek, vždy bolo ich skóre priemerné. Nešlo mu však do hlavy, prečo je to tak.

Kružnice k, l sa pretínajú v bodoch $P \neq Q$. Na kružnici k si zvolíme bod M . Priamky MP, MQ pretínajú kružnicu l postupne v bodoch B, C rôznych od P, Q . Označme X priesečník priamok BQ a CP . Dokážte, že to, či X leží na kružnici k , nezávisí od voľby bodu M (tzn. je to dané iba polohou kružníc k, l). V prípade, že X leží na kružnici k , dokážte navyše, že BC je priemerom l .

Riešenie.

opravuje Teri (terez.skublova@trojsten.sk)

Predtým, ako začneme úlohu riešiť, sa najprv musíme pozrieť na to, aké rôzne konfigurácie bodov z úlohy môžu nastať, lebo v rôznych konfiguráciách sa môžu odôvodnenia platnosti tvrdení líšiť.

Pre jednoduchosť odkazovania si označme oblúk PQ kružnice k ležiaci vnútri kruhu ohraničeného kružnicou l ako vnútorný oblúk PQ_k a oblúk PQ kružnice k neležiaci vnútri kruhu ohraničeného kružnicou l ako vonkajší oblúk PQ_k . Podobne si rozdelíme aj oblúk PQ kružnice l ako vnútorný oblúk PQ_l (ležiaci vnútri kruhu ohraničeného kružnicou k) a ako vonkajší oblúk PQ_l (neležiaci vnútri kruhu ohraničeného kružnicou k).

Bod P a Q sú fixne dané pre každú polohu kružníc k a l , a teda sa nám stačí zaoberať polohami ostatných bodov. Keďže bod M ovplyvňuje polohu všetkých ostatných bodov (vynímajúc body P, Q), tak sa nám stačí pozrieť na prípad, keď M leží na vnútornom oblúku PQ_k , a na prípad, keď M leží na vnútornom oblúku PQ_k .

Ak M leží na vonkajšom oblúku PQ_k , tak môžu nastať tri prípady:

1. body B, C ležia obidva na vonkajšom oblúku PQ_l ,
2. body B, C ležia obidva na vnútornom oblúku PQ_l ,
3. jeden z bodov B, C leží na vnútornom oblúku PQ_l a druhý leží na vonkajšom oblúku PQ_l (pričom je jedno, ktorý z týchto dvoch bodov leží na vnútornom a ktorý na vonkajšom – tieto dve situácie sú symetrické, a teda sa nám stačí zaoberať len jednou z nich).

Iné prípady v tejto možnosti nemôžu nastať, lebo body B, C sú zo zadania rôzne od bodov P, Q .

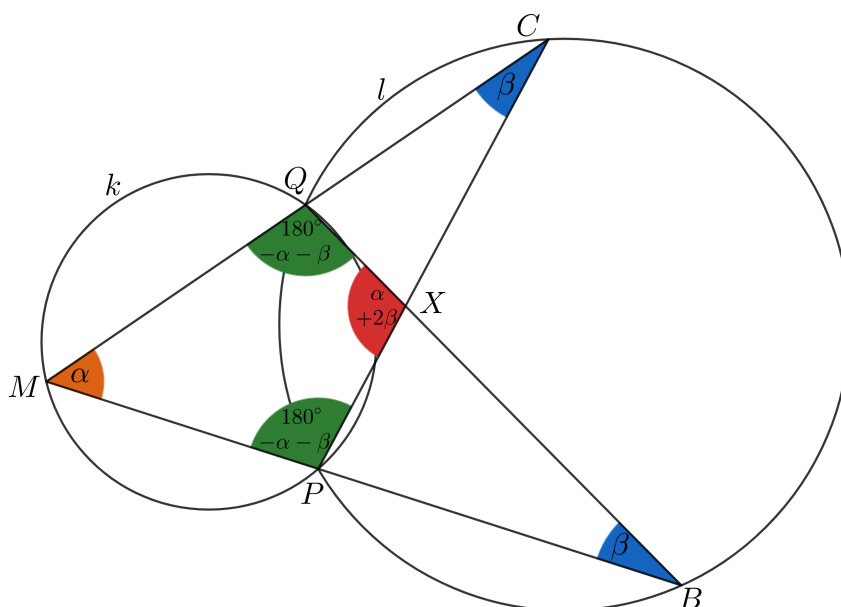
Ak M leží na vnútornom oblúku PQ_k , tak body B, C musia nutne ležať na vonkajšom oblúku PQ_l . Je to preto, lebo v tomto prípade bod M leží vnútri kruhu ohraničeného kružnicou l , a teda polpriamka MQ , ktorá vychádza z vnútorného bodu kruhu, pretína kružnicu najviac jedenkrát (a to práve v bode Q) a polpriamka QM , ktorá vychádza z bodu na kružnici l , leží celá v polrovine určenej priamkou PQ , ktorá obsahuje vonkajší oblúk PQ_l , a teda kružnicu l nevie preťať v bode ležiacom v druhej polrovine určenej priamkou PQ (tá polrovina, ktorá obsahuje vnútorný oblúk PQ_l), a teda musí kružnicu l preťať na vonkajšom oblúku PQ_l . Podobne je to s priesečníkmi polpriamok PM a MP s kružnicou l .

Musíme teda preriešiť 4 rôzne prípady polohy bodov M, B, C .

Predtým, než sa pozrieme na jednotlivé prípady, si zavedieme ešte jedno označenie. Pre danú konfiguráciu kružníc k, l má tetiva PQ v oboch kružniciach fixnú dĺžku. Preto aj obvodové uhly v kružniciach k, l nad tetivou PQ budú mať fixnú veľkosť. Pre kružnicu k a jej vonkajší oblúk PQ_k si označíme obvodový uhol k tetive PQ ako α . Podobne pre kružnicu l a jej vonkajší oblúk PQ_l si označíme obvodový uhol k tetive PQ ako β .

Teraz sa už môžeme pustiť do rozoberania jednotlivých konfigurácií.

1. konfigurácia - bod M leží na vonkajšom oblúku PQ_k , body B, C ležia obidva na vonkajšom oblúku PQ_l



Uhol $\angle PMQ$ má veľkosť α , lebo je to obvodový uhol nad tetivou PQ v kružnici k a bod M leží na vonkajšom oblúku PQ_k . Ďalej vieme, že $|\angle PCQ| = |\angle PBQ| = \beta$, lebo je to obvodový uhol nad tetivou PQ v kružnici l a body B, C ležia na vonkajšom oblúku PQ_l . Zo súčtu veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka MQB vieme, že

$$|\angle MQB| = 180^\circ - |\angle QMB| - |\angle QBM| = 180^\circ - |\angle QMP| - |\angle QBP| = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

Podobne zo súčtu veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka MPC vieme, že

$$|\angle MPC| = 180^\circ - |\angle PMC| - |\angle PCM| = 180^\circ - |\angle PMQ| - |\angle PCQ| = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

Zo súčtu vnútorných uhlov v štvoruholníku $MPXQ$ dostávame, že

$$\begin{aligned} |\angle QXP| &= 360^\circ - |\angle XQM| - |\angle QMP| - |\angle MPX| = 360^\circ - |\angle BQM| - |\angle QMP| - |\angle MPC| = \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta) - \alpha - (180^\circ - \alpha - \beta) = \alpha + 2\beta. \end{aligned}$$

Získavame, že $|\angle QXP| = \alpha + 2\beta$, čo je hodnota, ktorá nie je závislá na polohe bodu M , ale len na polohe kružníc k, l . Tým sme dokázali prvú časť zadania pre možnosť túto konfiguráciu.

Predpokladajme teda, že bod X leží na kružnici k . Potom je štvoruholník $MPXQ$ tetivový, a teda $|\angle MQX| + |\angle MPX| = 180^\circ$. Z toho vyplýva, že:

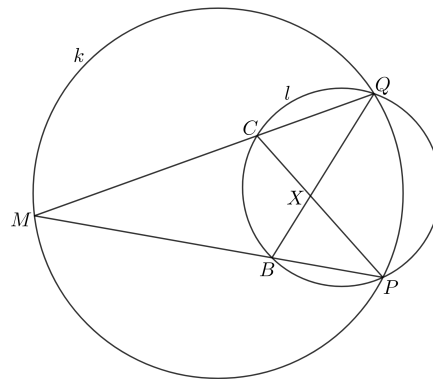
$$180^\circ - \alpha - \beta + 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ,$$

$$180^\circ = 2 \cdot (\alpha + \beta),$$

$$90^\circ = \alpha + \beta.$$

Keďže uhol $\angle MQX$ je susedný uhol s uhlom $\angle XQC$, tak dostávame, že platí $|\angle BQC| = |\angle XQC| = 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta) = \alpha + \beta = 90^\circ$. Uhol $\angle BQC$ je teda pravý, z čoho vyplýva, že tetiva BC , nad ktorou je tento uhol obvodovým uhlom, je priemer kružnice l . Tým sme dokázali pre túto konfiguráciu aj druhú časť zadania.

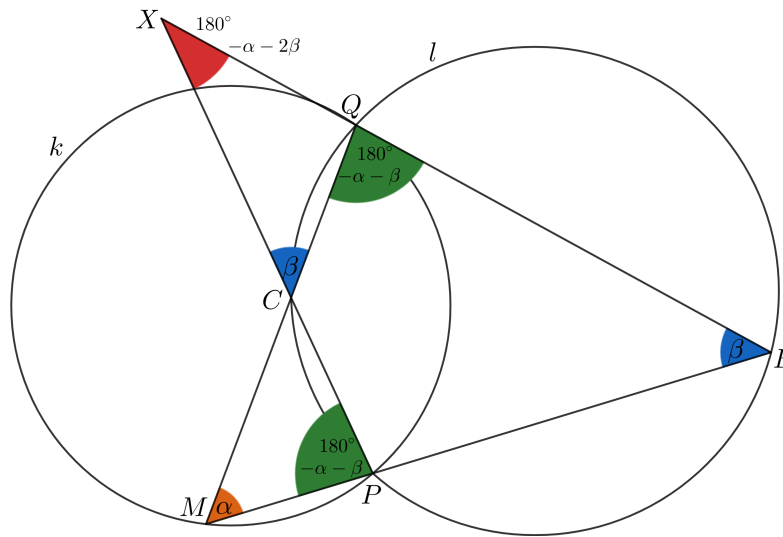
2. konfigurácia - bod M leží na vonkajšom oblúku PQ_k , body B, C ležia obidva na vnútornom oblúku PQ_l



V tomto prípade sa nikdy nemôže stať, že by bod X ležal na kružnici k . Je to preto, lebo bod X bude ležať v polrovine určenej priamkou QP , ktorá obsahuje bod M , a teda by bod X mohol ležať na kružnici k len vtedy, ak by ležal na vonkajšom oblúku PQ_k . To však nie je možné, keďže poradie bodov Q, C, B, P na kružnici l je presne takéto,

kvôli tomu, že body C, Q ležia v jednej polrovine určenej osou uhla QMP a body B, P ležia v druhej polrovine určenej touto osou, a zároveň body B, C ležia na vnútornom oblúku PQ_l . Preto body Q, C, B, P tvoria štvoruholník v tomto poradí a bod X leží na priesečníku jeho uhlopriečok. Tento priesečník uhlopriečok musí byť vnútri štvoruholníka, lebo tento štvoruholník je konvexný, a keďže X leží vnútri tohto štvoruholníka, tak leží aj vnútri kruhu ohraničeného kružnicou l . Tým pádom nevie ležať na vonkajšom oblúku PQ_k , lebo ten bol definovaný ako ten oblúk k , ktorý neleží vnútri kruhu ohraničeného kružnicou l .

3. konfigurácia - bod M leží na vonkajšom oblúku PQ_k , bod B leží na vonkajšom oblúku PQ_l a bod C leží na vnútornom oblúku PQ_l



Uhol PMQ má veľkosť α , lebo je to obvodový uhol nad tetivou PQ v kružnici k a bod M leží na vonkajšom oblúku PQ_k . Ďalej vieme, že $|\angle PCQ| = 180^\circ - \beta$ a $|\angle PBQ| = \beta$, lebo sú to obvodové uhly nad tetivou PQ v kružnici l , bod B leží na vonkajšom oblúku PQ_l a bod C leží na vnútornom oblúku PQ_l . Zo súčtu veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka MQB vieme, že

$$|\angle MQB| = 180^\circ - |\angle QMB| - |\angle QBM| = 180^\circ - |\angle QMP| - |\angle QBP| = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

Podobne zo súčtu veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka MPC vieme, že

$$|\angle MPC| = 180^\circ - |\angle PMC| - |\angle PCM| = 180^\circ - |\angle PMQ| - (180^\circ - |\angle PCQ|) = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

Zo súčtu vnútorných uhlov v trojuholníku XCQ dostávame, že

$$\begin{aligned} |\angle QXC| &= 180^\circ - |\angle XQC| - |\angle XCQ| = 180^\circ - (180^\circ - |\angle BQM|) - |\angle PCM| = \\ &= 180^\circ - (180^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta)) - \beta = 180^\circ - \alpha - 2\beta. \end{aligned}$$

Získavame, že $|\angle QXP| = 180^\circ - \alpha - 2\beta$, čo je hodnota, ktorá nie je závislá na polohe bodu M , ale len na polohe kružníc k, l . Tým sme dokázali prvú časť zadania pre túto konfiguráciu.

Predpokladajme teda, že bod X leží na kružnici k . Potom je štvoruholník $MPQX$ tetivový, a teda $|\angle PMQ| = |\angle PXQ|$, lebo sú to obvodové uhly nad jednou tetivou. Z toho vyplýva, že:

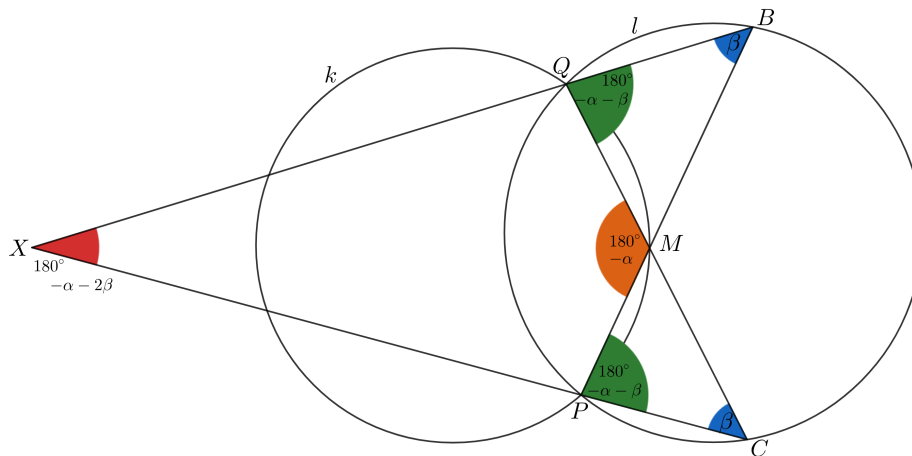
$$\alpha = 180^\circ - \alpha - 2\beta,$$

$$2 \cdot (\alpha + \beta) = 180^\circ,$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$

Keďže uhol $\angle MQX$ je susedný uhol s uhlom $\angle MQB$, tak dostávame, že platí $|\angle BQM| = |\angle BQC| = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ$. A teda je uhol $\angle BQC$ pravý, z čoho vyplýva, že tetiva BC , nad ktorou je tento uhol obvodovým uhlom, je priemer kružnice l . Tým sme dokázali pre túto konfiguráciu aj druhú časť zadania.

4. konfigurácia - bod M leží na vnútornom oblúku PQ_k , body B, C ležia obidva na vonkajšom oblúku PQ_l



Uhol $\angle PMQ$ má veľkosť $180^\circ - \alpha$, lebo je to obvodový uhol nad tetivou PQ v kružnici k a bod M leží na vnútornom oblúku PQ_k . Ďalej vieme, že $|\angle PCQ| = |\angle PBQ| = \beta$, lebo je to obvodový uhol nad tetivou PQ v kružnici l a body B, C ležia na vonkajšom oblúku PQ_l . Zo súčtu veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka MQB vieme, že

$$|\angle MQB| = 180^\circ - |\angle QMB| - |\angle QBM| = 180^\circ - |\angle QMP| - |\angle QBP| = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

Podobne zo súčtu veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka MPC vieme, že

$$|\angle MPC| = 180^\circ - |\angle PMC| - |\angle PCM| = 180^\circ - |\angle PMQ| - |\angle PCQ| = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

Zo súčtu vnútorných uhlov v štvoruholníku $MPXQ$ dostávame, že

$$\begin{aligned} |\angle QXP| &= 360^\circ - |\angle XQM| - |\angle QMP| - |\angle MPX| = 360^\circ - (180^\circ - |\angle BQM|) - |\angle QMP| - (180^\circ - |\angle MPC|) = \\ &= 360^\circ - (\alpha + \beta) - (180^\circ - \alpha) - (\alpha + \beta) = 180^\circ - \alpha - 2\beta. \end{aligned}$$

Získavame, že $|\angle QXP| = 180^\circ - \alpha - 2\beta$, čo je hodnota, ktorá nie je závislá na polohe bodu M , ale len na polohe kružníc k, l . Tým sme aj pre túto konfiguráciu dokázali prvú časť zadania.

Predpokladajme teda, že bod X leží na kružnici k . Potom je štvoruholník $MPXQ$ tetivový, a teda $|\sphericalangle MQX| + |\sphericalangle MPX| = 180^\circ$. Z toho vyplýva, že:

$$\alpha + \beta + \alpha + \beta = 180^\circ,$$

$$2 \cdot (\alpha + \beta) = 180^\circ,$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$

Keďže uhol $\sphericalangle MQX$ je susedný uhol s uhlom $\sphericalangle MQB$, tak dostávame, že platí $|\sphericalangle MQB| = |\sphericalangle BQC| = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - \alpha - \beta$. A teda je uhol $\sphericalangle BQC$ pravý, z čoho vyplýva, že tetiva BC , nad ktorou je tento uhol obvodovým uhlom, je priemer kružnice l . Tým sme dokázali pre túto konfiguráciu aj druhú časť zadania.

Vyššie sme pre všetky konfigurácie dokázali vlastnosti zo zadania, a teda sme vyriešili celú úlohu.

Alternatívne sa dala úloha riešiť za pomoci orientovaných uhlov, čo by nám umožnilo vyhnúť sa rozpisovaniu všetkých konfigurácií.

Poznámka

Viacerí z vás ste si správne všimli, že priamky QB a PC môžu byť v posledných dvoch konfiguráciách (pre $\alpha + 2\beta = 180^\circ$) rovnobežné, a teda nám nevzniká bod X . V zadaní sme však zabudli napísať, že týmto okrajovým prípadom sa nemáte venovať, keďže v nich skúmané tvrdenie vlastne vôbec nedávalo zmysel. Za chybu sa ospravedľujeme.

1.9 Krútia Makovice Sa

Zadanie. Po tolkom počítaní sa našej delegácii zatočili hlavy. A ako im rotovali hlavy, tak im rotovali aj čísla, s ktorými počítali. Najväčší hlavybôľ však prišiel, keď to zašlo do Bodu, že všetky tieto zrotované čísla boli násobkami toho pôvodného.

Nech $n \in \mathbb{N}$. Zoberme si n -ciferné číslo $A = \overline{a_{n-1} \dots a_1 a_0}$, ktorého cifry $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sú nenulové a zároveň nie sú všetky rovnaké. Označme ďalej pre $1 \leq k < n$ ako A_k číslo, ktoré vznikne po zrotovaní cifier A o k pozíciu, teda $A_k = \overline{a_{n-k-1} \dots a_1 a_0 a_{n-1} \dots a_{n-k}}$. Nájdite všetky A také, že každé A_k je deliteľné číslom A .

Riešenie.

opravuje Michal S. (michal.stanik@trojsten.sk)

Našou úlohou je nájsť všetky čísla A , ktoré delia všetky svoje cyklické rotácie cifier (jednotlivé A_k). Predpokladajme, že máme nejaké také číslo A . Toto číslo musí deliť aj číslo, ktoré dostaneme tak, že jeho prvú cifru presunieme na koniec (A_1). Poďme si toto číslo vyjadriť. Od A musíme odpočítať (10^{n-1}) -násobok prvej cifry, vynásobiť ho desiatimi (čo posunie všetky cifry) a cifru, ktorá bola pôvodne prvá, pripočítať:

$$A \mid (A - 10^{n-1}a_{n-1}) \cdot 10 + a_{n-1}.$$

Deliteľnosť znamená, že pravá strana je k -násobkom ľavej strany pre nejaké celé číslo k (nesúvisí s k , ktorými zadanie indexuje A_k):

$$kA = (A - 10^{n-1}a_{n-1}) \cdot 10 + a_{n-1},$$

$$kA = 10A - 10^n a_{n-1} + a_{n-1},$$

$$(10 - k)A = a_{n-1}(10^n - 1).$$

Pravá strana je zrejme kladná, takže aj ľavá musí byť. Aj číslo k musí byť kladné a musí preto platiť $1 \leq k \leq 9$, čiže aj $1 \leq 10 - k \leq 9$. Pozrime sa teraz na všetky možné hodnoty činiteľa $(10 - k)$ na ľavej strane rovnosti:

$10 - k = 1$	$A = \frac{a_{n-1} \cdot (10^n - 1)}{1} = a_{n-1} \cdot 999 \dots 9$
$10 - k = 2$	$A = \frac{a_{n-1} \cdot (10^n - 1)}{2} = \frac{a_{n-1}}{2} \cdot 999 \dots 9$
$10 - k = 3$	$A = \frac{a_{n-1} \cdot (10^n - 1)}{3} = a_{n-1} \cdot 333 \dots 3$
$10 - k = 4$	$A = \frac{a_{n-1} \cdot (10^n - 1)}{4} = \frac{a_{n-1}}{4} \cdot 999 \dots 9$
$10 - k = 5$	$A = \frac{a_{n-1} \cdot (10^n - 1)}{5} = \frac{a_{n-1}}{5} \cdot 999 \dots 9$
$10 - k = 6$	$A = \frac{a_{n-1} \cdot (10^n - 1)}{6} = \frac{a_{n-1}}{2} \cdot 333 \dots 3$
$10 - k = 7$	necháme si na neskôr
$10 - k = 8$	$A = \frac{a_{n-1} \cdot (10^n - 1)}{8} = \frac{a_{n-1}}{8} \cdot 999 \dots 9$
$10 - k = 9$	$A = \frac{a_{n-1} \cdot (10^n - 1)}{9} = a_{n-1} \cdot 111 \dots 1$

Z týchto prípadov okrem $10 - k = 7$ nevieme získať žiadne riešenie našej úlohy, pretože A musí byť násobkom čísla so samými rovnakými ciframi, ale taký násobok bude tiež mať všetky cifry rovnaké, čo nám nevyhovuje, alebo bude mať cifier viac, ale číslo A musí mať presne toľko cifier, koľko je devín, trojok či jednotiek (ich počet je n). Všetky zlomky v tabuľke typu $\frac{a_{n-1}}{i}$ sú pritom naozaj celé čísla, pretože príslušné i sú s číslami so samými rovnakými ciframi v tom istom riadku nesúdeliteľné.

Preskúmame napokon jediný ostávajúci prípad $10 - k = 7$. Má platiť

$$7A = a_{n-1}(10^n - 1).$$

Ľavá strana je násobkom 7, teda aj pravá musí byť. Ak by $a_{n-1} = 7$ (je to len jedna cifra), tak by sme mali $A = (10^n - 1) = 999 \dots 9$, čo nám nevyhovuje. Preto musí byť siedmimi deliteľné $10^n - 1$. Keď si vypíšeme zvyšky 10^n po

delení 7, dostaneme 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, ... a ďalej sa budú cyklicky opakovať, pretože každý zvyšok je jednoznačne určený predošlým. Musí teda platiť $n = 6m$. V tom prípade máme

$$7A = a_{n-1}(10^n - 1),$$

$$A = a_{n-1} \cdot 142857142857 \dots 142857.$$

Máme číslo, v ktorom sa opakuje perióda cifier 142857. Násobky takého čísla vyzerajú tak, že sa opakuje jedna z periód 142857, 285714, 428571, 571428, 714285, 857142 (ďalším je už 999999). Ak by sme za a_{n-1} vzali čokoľvek väčšie ako 1, číslo A by obsahovalo cifru 1, ale by ňou nezačínalo. Teda cyklická rotácia s jednotkou na začiatku by bola menšia ako A , takže by ju A nedelilo. Musí totiž stále platiť, že A má n cifier, takže $a_{n-1} > 7$ nepripadá do úvahy.

Máme teda

$$A = \frac{10^{6m} - 1}{7} = 142857142857 \dots 142857,$$

kde postupnosť 142857 sa opakuje m krát, $m \in \mathbb{N}$.

Všetky takéto čísla sú riešením našej úlohy, pretože cyklické posuny 142857 sú práve uvedené násobky (142857, 285714, 428571, 571428, 714285, 857142) a pre čísla s m opakovaniami tejto periódy to platí tiež, pretože cyklické posúvanie cifier v celom dlhšom čísle je to isté, ako cyklické posúvanie jeho cifier v rámci jednotlivých šestic. Ak napríklad číslo X vzniklo cyklickým posunom 142857, potom číslo $\overline{XXXXX}$ vzniklo cyklickým posunom celého zväzku päť po sebe idúcich čísel 142857. Z toho aj vyplýva, že cyklické posuny týchto dlhších sekvencií sú násobkami pôvodnej sekvencie, nakoľko jednotlivé šestice cifier sú na sebe nezávislé – nedochádza k žiadnym prenosom/zvýškom medzi nimi. Inak povedané, keď máme $a \cdot 142857 = X$, tak $a \cdot 142857142857 \dots 142857 = \overline{XX \dots X}$, kde X je príslušná postupnosť 6 cifier.

1.10 Kopeme Mesto Stratené

Zadanie. V jednom momente si matfyzní počtári všimli, že sa im to už nejako kráti. Opustili preto Od a zašli si pozrieť Sofiu. Je to tam samá vykopávka, takže im netrvalo dlho, kým narazili na kamennú fontánu. Už v nej síce nebola voda, no kedysi určite reálne slúžila na niečo prospešné. Pomôžte im zistiť, na čo konkrétne.

Nájdite všetky kladné reálne funkcie $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ splňajúce pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$ vzťah

$$f(f(x) + y) \cdot f(x) = f(xy + 1).$$

Riešenie.

opravuje **Pedro** (peter.sukenik@trojsten.sk)

Na začiatok si predstavíme veľmi užitočnú vlastnosť funkcií, ktorá sa často využíva pri riešení funkcionálnych rovníc – prostosť – a povieme si, prečo sa zväčša potešíme, keď túto vlastnosť o našej hľadanej funkcii zistíme. Ak presne viete, čo tu idem teraz napísať, pokojne tento odstavec preskočte. Funkcia f (napríklad taká, ktorá rieši našu rovnicu zo zadania) sa nazýva prostá, ak pre všetky x, y z definičného oboru funkcie² platí: $f(x) = f(y) \implies x = y$. Slovné: funkcia f je prostá ak žiadne jej dva rôzne vstupy nemajú rovnakú funkčnú hodnotu. Prečo je táto vlastnosť tak super pri funkcionálnych rovniciach? Predpokladajme, že sa nám pri riešení podarí dopracovať k vzťahu: $f(\text{výraz 1}) = f(\text{výraz 2})$. Potom využitím definičnej vlastnosti prostosti vieme povedať, že

²Definičný obor funkcie je množina vstupov, pre ktoré je funkcia zadefinovaná

výraz 1 = výraz 2. Týmto sme sa zbavili neprijemnej “šupky” a dostali sme sa k plodom. Rovnosť takýchto dvoch vstupov do funkcie f nám často odhalí veľmi zjednodušené, často kľúčové tvrdenie. Ak si to neviete predstaviť v praxi, stačí pokračovať v čítaní tohto riešenia.

Teraz, keď už vieme, že prostosť je sexi, pokúsime sa ju v tejto úlohe získať. Nanešťastie, nebude to také jednoduché, lebo po chvíli hrania sa so zadáním si ľahko všimneme, že funkcia $f(x) = 1$ vyhovuje zadaniu (ako jediná úplne konštantná funkcia). Naša funkcia teda nemôže byť prostá bez dodatočných trikov. Ukážeme teda, že ak funkcia f nie je prostá, potom musí spĺňať $f(x) = 1$. Potom budeme môcť vylúčiť tento prípad tým, že budeme *predpokladať*, že funkcia je prostá, a zistíme, či sa dopracujeme k nejakému ďalšiemu riešeniu.

Nech teda existujú $a < b$ také, že $f(a) = f(b)$. Pozrieme sa, čo z tohto bude vyplývať. Všimnime si, že v ľavej strane našej rovnice vystupuje člen x vždy iba sám vo funkcií f . Teda by sme mohli vstupy a, b oba postupne dosadiť za x , kým y necháme „voľné“, aby sme na ľavej strane dospeli k rovnakému výrazu. Dostávame

$$f(f(a) + y)f(a) = f(ay + 1),$$

ako aj

$$f(f(b) + y)f(b) = f(by + 1).$$

Vidíme, že ľavé strany sa rovnajú, a teda pre každé $y \in \mathbb{R}^+$ máme $f(ay + 1) = f(by + 1)$. Toto je v podstate veľmi silné tvrdenie – dáva nám to do rovnosti funkčné hodnoty nekonečného množstva rôznych dvojíc vstupov. Napríklad si môžeme všimnúť, že z ľubovoľného $z > 1$ vieme pomocou tejto rovnosti „skákať“ dole alebo hore a vytvoriť tak postupnosť rôznych čísel, ktorá má celá rovnakú funkčnú hodnotu. Ako? Stačí položiť do rovnosti $ay + 1 = z$ a vyriešiť pre y . Vieme, že riešenie existuje v našom definičnom obore, lebo $z > 1$. Potom dosadíme túto hodnotu y do výrazu $by + 1$ a dostaneme $z' > z$ také, že $f(z) = f(z')$. Potom presadením z za z' a zopakovaním tohto procesu dostaneme danú rovnosť opäť, tentoraz pre pôvodné z' , teraz z , a nové, ešte väčšie z' . A takto to opakovať donekonečna. Podobne, ak by sme postupovali rovnako až na to, že by sme riešili $by + 1 = z$ a potom dosádzali do $ay + 1$, dostali by sme nekonečnú postupnosť večne sa približujúcu k 1 zhora, ktorá by celá dosahovala rovnakú funkčnú hodnotu po dosadení do f .

Čo s tým ale vieme spraviť? Žiaľ, po chvíľke zamyslenia si uvedomíme, že takýmto spôsobom by sme vytvorili nekonečne veľa postupností, o ktorých by sme vedeli, že majú rovnakú funkčnú hodnotu, ale nevedeli by sme hneď tieto postupnosti prepojiť. Kľúčové pozorovanie je, že ak pre a, b platí $f(a) = f(b)$, potom využitím práve vzťahu $f(ay + 1) = f(by + 1)$ vieme (takmer) ľubovoľnou voľbou y dostať nový pár a', b' taký, že: $f(a') = f(b')$. Načo je nám dobré získať nový takýto pár? Podstatné je, že $\frac{b'}{a'} \in (1, \frac{b}{a})$, a zároveň, že ľubovoľnú hodnotu zlomku $\frac{b'}{a'}$ v tomto intervale vieme dosiahnuť vhodnou voľbou y . To sa dá vidieť vyriešením rovnice, v ktorej položíme $\frac{b'}{a'}$ rovné ľubovoľnému číslu z daného intervalu.

Majme teraz ľubovoľný pár $1 < z < w$. Ak zvolíme y tak, aby $by + 1 = w$, vidíme, že $y = (w - 1)/b$. Dosadiac to do $ay + 1$ získame hodnotu $(w - 1)a/b + 1$. Pozrime sa teraz na pomer w a $(w - 1)a/b + 1$ po odčítaní 1 od oboch:

$$\frac{w - 1}{(w - 1)a/b + 1 - 1} = \frac{b}{a}.$$

Preto z pohľadu 1, pomer týchto dvoch čísel je $\frac{b}{a}$. Keby sme si teda číslo 1 predstavili ako 0 a čísla väčšie ako 1 ako kladné čísla, potom pomer medzi dvomi po sebe idúcimi členmi takto vzniknutej postupnosti je presne $\frac{b}{a}$. Ak $\frac{b}{a} = \sqrt[k]{\frac{w-1}{z-1}}$ pre nejaké prirodzené k , potom postupným skákaním smerom dolu spôsobom, ako sme to robili doteraz, získame $f(w) = f(z)$. Toto avšak nemusí platiť. Našťastie, práve preto je pozorovanie o získaní nového páru $f(a') = f(b')$ také užitočné. Ak $\frac{b}{a} \neq \sqrt[k]{\frac{w-1}{z-1}}$, stačí zobrať dostatočne vysoké k , zvoliť $q = \sqrt[k]{\frac{w-1}{z-1}} < \frac{b}{a}$ a potom nájsť také y , že $\frac{by+1}{ay+1} = q$. Z toho získavame $f(w) = f(z)$.

Nakoľko sme na začiatku tejto konštrukcie nekládli žiadne podmienky na z, w okrem toho, že sú väčšie ako 1, dostávame túto rovnosť pre všetky vstupy väčšie ako 1. Teda naša funkcia f je konštantná na celom intervale $(1, \infty)$. Označme si jej funkčnú hodnotu c . Dosadíme teraz do našej rovnice $1 < z, w$ za x, y . Dostaneme

$$f(f(z) + w)f(z) = f(zw + 1).$$

Po zvážení, že všetky vstupy vonkajších funkcií budú väčšie ako 1, získavame $c^2 = c$, z čoho vyplýva $c = 1$. Teraz dosadíme $z \leq 1 < w$, z za x a w za y . Dostaneme:

$$f(f(z) + w)f(z) = f(zw + 1).$$

Po zvážení, že vstup prvej funkcie na ľavej strane a funkcie na pravej strane sú väčšie ako 1 získavame $f(z) = 1$. Takto sme teda dostali vzťah $f(x) = 1$ pre všetky možné vstupy, čím sa nám úspešne podarilo ukázať, čo sme pôvodne chceli.

Teraz už môžeme konečne predpokladať, že funkcia f je prostá. Nanešťastie, naša rovnica obsahuje tri rôzne $f()$ výrazy, a teda náš trik so škrtaním f popísaný v prvom odstavci nemôžeme hneď použiť. Musíme sa vhodnými dosadeniami zbaviť niektorej z týchto funkcií – napríklad tak, že ukážeme, že pre dané dosadenie je rovná 1. Zatiaľ však nemáme dostatok informácií o našej f , aby sme také niečo mohli spraviť. Všimnime si ale, že $f(x)$ a $f(xy + 1)$ by sme vedeli škrtnúť, ak by platilo $x = xy + 1$. Toto vskutku vieme dosiahnuť voľbou $y = \frac{x-1}{x}$, pokiaľ $x > 1$. Potom dostaneme, po škrtnutí týchto dvoch funkcií

$$f\left(f(x) + \frac{x-1}{x}\right) = 1.$$

Označme si $a := f(x) + \frac{x-1}{x}$. Potom vidíme, že $f(a) = 1$. Našli sme teda vstup, ktorý budeme vedieť dosadiť do f tak, aby sme sa f zbavili. Dosadíme teda (celkom prirodzene) a za x a y nechajme voľné. Po škrtnutí $f(a)$ dostaneme

$$f(1 + y) = f(ay + 1),$$

z čoho okamžite vidíme $a = 1$ po použití nášho škrtacieho triku. Z prostosti f tiež vieme, že a je jediný vstup, ktorého funkčná hodnota je 1. My však tiež vieme, čo sme si ako a označili. Dostávame, že $f(x) + \frac{x-1}{x} = a = 1$. Teda máme, že $f(x) + \frac{x-1}{x} = 1$, čo sa po úprave zmení na $f(x) = \frac{1}{x}$. Spomeňme si, že x bolo voľné až na to, že sme chceli $x > 1$. Máme teda $f(x) = \frac{1}{x}$ pre všetky $x > 1$. Zvoľme teraz už len $x \leq 1 = y$ a využime náš zistený vzťah. Po

dosadení dostaneme:

$$\frac{f(x)}{f(x) + 1} = \frac{1}{x + 1},$$

čo po úprave znamená: $f(x) = \frac{1}{x}$. Máme teda $f(x) = \frac{1}{x}$ pre všetky x . Dpracovali sme sa tak k jedinému ďalšiemu kandidátovi na riešenie našej úlohy. Po dosadení všeobecných argumentov x, y do našej zadanej rovnice a overení tejto funkcie zisťujeme, že skutočne taká funkcia rieši našu rovnicu.

Teda jedinými riešeniami našej rovnice sú funkcie $f(x) = 1$ a $f(x) = \frac{1}{x}$.