



Riešenia 2. kola zimnej časti

2.1 Kúpim Merač Spravodlivosti ($\kappa \leq 1$)

Zadanie. Prechádzal som sa po lese, až som našiel perníkovú chalúpku. Vošiel som dnu, že sa poobzerám, keď tu zrazu do chalúčky vošlo 5 trpaslíkov. Každý z nich mal čiapočku – buď modrú, alebo červenú. Trpaslík s modrou čiapočkou vždy hovorí pravdu, trpaslík s červenou čiapočkou vždy klame. Každý z nich vidí na čiapočky ostatných, no nie na svoju. Postupne mi povedali:

- Lavórik: „Vidím 4 modré čiapočky.“
- Kuckuc: „Vidím 3 modré čiapočky a 1 červenú.“
- Bojkoš: „Vidím 1 modrú čiapočku a 3 červené.“
- Chrapoš: „Vidím 4 červené čiapočky.“
- Havoš nepovedal nič.

Som však farboslepý, a teda potrebujem detektor lži. Alternatívne kúpim aj riešenie tejto úlohy, v ktorom zistíte, ktorý trpaslík má čiapočku ktorej farby. V prípade spokojnosti ponúkam až 9 bodov.

Riešenie.

opravuje Kaja (karolina.pisonova@trojsten.sk)

Začnime Lavórikovým tvrdením. Ak by hovoril pravdu, teda by mal modrú čiapku, tak by všetci museli hovoriť pravdu a mať modré čiapky, čo nie je možné, keďže niektorí tvrdia, že vidia červené čiapky. **Lavórik má teda červenú čiapku.**

Ďalej, keby Kuckuc hovoril pravdu a mal modrú čiapku, tak by ostatní traja okrem Lavórika, a teda aj Bojkoš, museli hovoriť pravdu, ale to, že Bojkoš vidí 3 červené čiapky, je v spore s tým, že Kuckuc vidí 3 modré, keďže spolu je čiapok iba 5, takže aj **Kuckuc musí mať červenú čiapku.**

Pozrime sa na Chrapoša. Ak by ten mal modrú čiapku, tak všetci ostatní by museli mať červené a klamať. Lenže potom, keď sa pozrieme na Bojkošovu situáciu, tak ten by skutočne videl Chrapošovu modrú čiapku a ostatné 3 červené, takže by vlastne hovoril pravdu, čo je zas v spore s tým, že by mal červenú čiapku. Preto aj **Chrapoš klame a má červenú čiapku.**

Ostávajú už len Bojkoš a Havoš. Ak by mal Bojkoš červenú čiapku a klamal by, tak by musel mať červenú čiapku aj Havoš, aby Bojkošovo tvrdenie nebolo pravdivé (lebo už teraz vieme, že 3 červené čiapky skutočne vidí). Lenže v tom prípade by sme sa dostali do situácie, že Chrapoš by skutočne videl 4 červené čiapky, čo je v spore s tým, že on má červenú čiapku, čo ale (ako sme si ukázali) musí mať.

Takže zostáva nám jedine možnosť, že **Bojkoš má modrú čiapku a v tom prípade má Havoš tiež modrú čiapku**, aby bolo Bojkošovo tvrdenie pravdivé.

Už len overíme, či v tomto prípade sedí aj všetko ostatné. V tejto situácii sú ale skutočne Lavórikove, Kuckucove aj Chrapošove tvrdenia nepravdivé a Bojkošovo je pravdivé, takže toto je jediná možná situácia, ktorá mohla nastať.

2.2 Kúpim Matematické Sústredenie ($\kappa \leq 2$)

Zadanie. Rád by som sa stretával s rôznymi matematickými úkazmi. Preto sa chcem zúčastniť matematického sústredenia. Zúčastniť sa však môžem len celej časti.

Nech a, b, c sú nezáporné reálne čísla. Ukážte, že

$$a + b + c - \lfloor a + b \rfloor - \lfloor a + b + c - \lfloor a + b \rfloor \rfloor = a + b + c - \lfloor b + c \rfloor - \lfloor a + b + c - \lfloor b + c \rfloor \rfloor.$$

Poznámka. Označenie $\lfloor x \rfloor$, slovne aj (dolná) celá časť čísla x , označuje najväčšie celé číslo neprevyšujúce x .

Riešenie.

opravuje **Ivka** (ivona.hrivova@trojsten.sk)

Našou úlohou je dokázať rovnosť. Preto budeme postupovať tak, že sa pokúsime prepísať ľavú stranu rovnosti tak, aby sme sa dostali ku tvaru pravej. Naľavo máme výraz

$$a + b + c - \lfloor a + b \rfloor - \lfloor a + b + c - \lfloor a + b \rfloor \rfloor.$$

Ako už bolo vysvetlené v zadaní, dolná celá časť čísla x je najväčšie celé číslo neprevyšujúce x . Platí teda

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Pozrime sa bližšie na výraz $\lfloor x + k \rfloor$, kde k je celé číslo. Keďže dolná celá časť celého čísla sa rovná hodnote čísla samotného, môžeme výraz prepísať nasledovne

$$\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k. \quad (2.1)$$

Každá hodnota dolnej celej časti je celé číslo, teda aj $\lfloor a + b \rfloor \in \mathbb{Z}$. Na základe rovnosti (2.1) môžeme upraviť náš výraz nasledovne

$$a + b + c - \lfloor a + b \rfloor - \lfloor a + b + c - \lfloor a + b \rfloor \rfloor = a + b + c - \lfloor a + b \rfloor - (\lfloor a + b + c \rfloor - \lfloor a + b \rfloor),$$

a tak dostávame tvar

$$a + b + c - \lfloor a + b \rfloor - \lfloor a + b + c \rfloor + \lfloor a + b \rfloor = a + b + c - \lfloor a + b + c \rfloor.$$

Pričítaním nuly hodnotu výrazu nezmeníme, preto keď ku danému výrazu pripočítame $0 = \lfloor b + c \rfloor - \lfloor b + c \rfloor$, dostaneme ekvivalentný výraz tvaru

$$a + b + c + \lfloor b + c \rfloor - \lfloor b + c \rfloor - \lfloor a + b + c \rfloor,$$

ktorý vďaka rovnosti (2.1) môžeme prepísať ako

$$a + b + c - \lfloor b + c \rfloor - \lfloor a + b + c - \lfloor b + c \rfloor \rfloor.$$

To je však pravá strana rovnosti zo zadania. Keďže všetky úpravy boli ekvivalentné a matematicky korektné, výraz na ľavej strane rovnosti je totožný s tým napravo.

2.3 Kúpim Mak Siaty ($\kappa \leq 3$)

Zadanie. Ako finalista majstrovstiev sveta v mletí maku potrebujem tréning. Preto kúpim 4247 ton maku. Pri mletí maku treba mak rozdeliť na čo najväčšie časti, zháňam teda aj najväčšieho deliteľa.

V závislosti na $a, b \in \mathbb{Z}$ určte najväčšieho spoločného deliteľa čísel $3ab$ a $a^2 + b^2$.

Riešenie. opravujú **Mati** (matus.zelko@trojsten.sk) a **Martin** (martin.kliment@trojsten.sk)

Najprv si môžeme všimnúť, že $\text{NSD}(a, b)^2$ delí oba výrazy, kde $\text{NSD}(a, b)$, značí najväčšieho spoločného deliteľa čísel a a b . Nech $a = \text{NSD}(a, b) \cdot x$ a $b = \text{NSD}(a, b) \cdot y$. Dosadením do oboch výrazov dostaneme

$$\begin{aligned} 3ab &= 3 \cdot (\text{NSD}(a, b) \cdot x) \cdot (\text{NSD}(a, b) \cdot y) = 3 \cdot x \cdot y \cdot \text{NSD}(a, b)^2, \\ a^2 + b^2 &= (\text{NSD}(a, b) \cdot x)^2 + (\text{NSD}(a, b) \cdot y)^2 = (x^2 + y^2) \cdot \text{NSD}(a, b)^2. \end{aligned}$$

Ostáva nám už iba overiť, či a za akých okolností bude $3 \cdot x \cdot y$ a $(x^2 + y^2)$ súdeliteľné, pričom už vieme, že x a y nie sú súdeliteľné. Nech p je ľubovoľný prvočíselný deliteľ x . Potom p delí $3 \cdot x \cdot y$, zároveň p delí x^2 , no nedelí y , lebo $\text{NSD}(x, y) = 1$. Potom p nedelí ani y^2 a tým pádom ani $x^2 + y^2$. Analogicky, žiadne prvočíslo deliace y nedelí $x^2 + y^2$.

Nakoniec nás čaká 3. Tú doriešime napríklad cez zvyškové triedy a deliteľnosť. Ak by 3 delila x , tak určite nedelí y . Potom však nemôže deliť ani $x^2 + y^2$. Ostáva nám preveriť prípad keď x dáva zvyšok 1, poprípade 2 po delení 3. Poďme sa pozrieť na zvyšky x^2 .

$$(3 \cdot z + 1)^2 = (9 \cdot z^2 + 6 \cdot z) + 1$$

a podobne

$$(3 \cdot z + 2)^2 = (9 \cdot z^2 + 6 \cdot z + 3) + 1.$$

Vidíme, že nech si zvolíme x, y ľubovoľne, tak nám ich štvorec dá zvyšok 1. $x^2 + y^2$ potom bude dávať zvyšok $(1 + 1) = 2$ po delení 3. Trojkou teda deliteľný tiež nebude.

Práve sme overili, že pokiaľ x a y sú nesúdeliteľné, tak aj $3 \cdot a \cdot b$ a $a^2 + b^2$ budú tiež nesúdeliteľné. Výsledok teda naozaj je $\text{NSD}(3 \cdot a \cdot b, a^2 + b^2) = \text{NSD}(a, b)^2$.

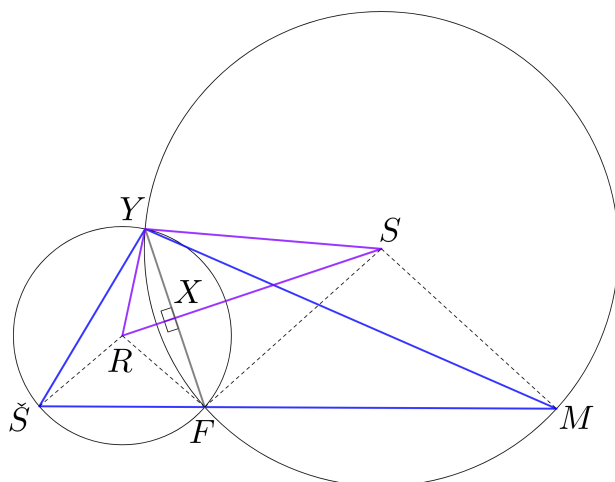
2.4 Kúpim Myši Syr ($\kappa \leq 5$)

Zadanie. Na narodeniny som dostal pascu na myši. Aby fungovala, potrebujem do nej trojuholník syra pre moju trojuholníkovú myš.

Majme trojuholník $MY\check{S}$ s bodom F na strane $M\check{S}$. Označme R a S postupne stredy kružníc opísaných trojuholníkom $FY\check{S}$ a MFY . Dokážte, že trojuholníky $MY\check{S}$ a SYR sú podobné.

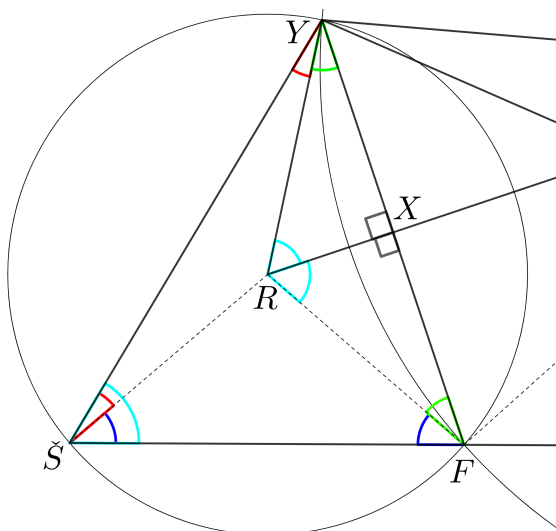
Riešenie. opravujú **Baška** (barbora.javorova@trojsten.sk) a **Baška** (barbora.novosadova@trojsten.sk)

Aby sme ukázali, že trojuholníky $MY\check{S}$ a SYR sú podobné, potrebujeme najprv ukázať, že majú rovnaké vnútorné uhly. Očakávame, že $|\angle YRS| = |\angle Y\check{S}M|$, $|\angle RSY| = |\angle \check{S}MY|$ a $|\angle SYR| = |\angle MY\check{S}|$.



Na začiatok si spojme Y a F , ktoré tvoria jedinou spoločnú tetivu oboch kružníc, ktorá je zároveň kolmá na spojnicu stredov kružníc RS . To vieme pretože stred opísanej kružnice leží na osiach strán, zároveň oba stredy musia ležať na osi YF , teda ich spojnica leží na osi YF . Ich priesečník si označíme ako bod X . Skúsme sa teraz pozrieť na trojuholník $FY\check{S}$ a ukázať z neho $|\sphericalangle YRS| = |\sphericalangle Y\check{S}M|$.

Spojíme si všetky vrcholy trojuholníka $\check{S}FY$ so stredom kružnice R .



Trojuholníky $Y\check{S}R$, $\check{S}FR$, FYR sú všetky rovnoramenné, teda aj ich uhly pri základni budú rovnaké. Z trojuholníka YRX vyplýva

$$90^\circ + \sphericalangle + \sphericalangle = 180^\circ,$$

$$\sphericalangle + \sphericalangle = 90^\circ,$$

$$\sphericalangle = 90^\circ - \sphericalangle.$$

Z trojuholníka $\triangle SFY$ vieme, že

$$2\angle SFY + 2\angle SFY + 2\angle SFY = 180^\circ,$$

čo môžeme vykrátiť dvomi a dostaneme

$$\angle SFY + \angle SFY + \angle SFY = 90^\circ,$$

$$\angle SFY + \angle SFY = 90^\circ - \angle SFY.$$

Spojením s predchádzajúcou rovnicou dostaneme

$$\angle SFY = 90^\circ - \angle SFY = \angle SFY + \angle SFY,$$

$$\angle SFY = \angle SFY + \angle SFY.$$

Ukázali sme teda, že platí rovnosť $|\angle YRS| = |\angle YSM|$.

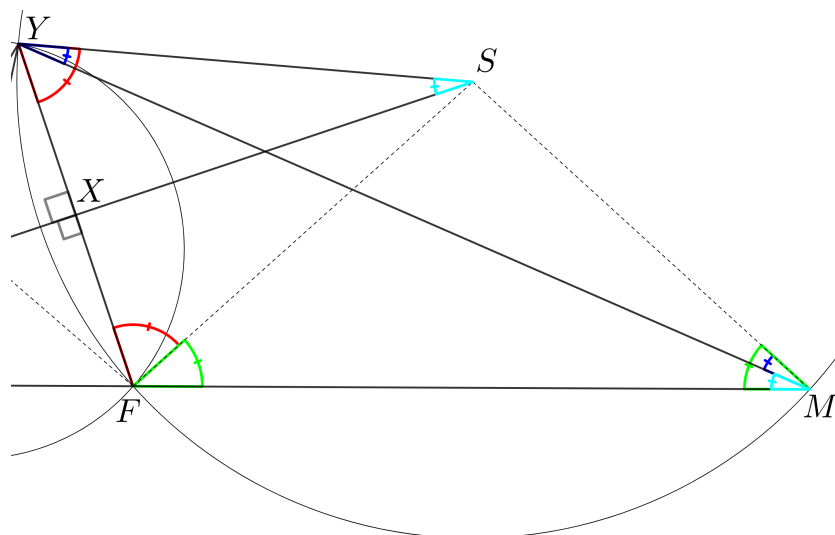
To, že uhol, pod ktorým sa na tetivu pozeráme zo stredu je dvojnásobkom toho, pod ktorým sa na ňu pozeráme z nejakého bodu na kružnici, je však celkom silná a často používaná vlastnosť. Ide o takzvaný stredový a obvodový uhol. Skúsme sa teda na to pozrieť z tohto uhla. Môžeme si všimnúť, že $\angle YSF$ je obvodový ku $\angle YRF$, a teda platí rovnosť $|\angle YRF| = 2|\angle YSF|$.

Zároveň vieme, že RX je os $\angle YRF$, keďže trojuholník RFY je rovnoramenný ($|RY| = |RF|$, keďže sú to polomery). Potom ale vieme, že RS nám delí $\angle YRF$ na polovicu, a teda platí rovnosť $|\angle YRF| = 2|\angle YRX|$.

Ak spojíme tieto dve rovnosti dohromady, dostávam $2|\angle YRX| = 2|\angle YSF|$, čo viem upraviť na $|\angle YSF| = |\angle YRX|$, čo je ekvivalentné s rovnosťou $|\angle YRS| = |\angle YSM|$.

Analogicky, i keď trochu inak sa pokúsime ukázať rovnosť $|\angle RSY| = |\angle SMY|$.

Znovu si spojíme všetky vrcholy trojuholníka FMY so stredom kružnice S .



Trojuholníky YMS , YFS , FMS sú všetky rovnoramenné, teda aj ich uhly pri základni budú rovnaké. Z trojuholníka YXS vyplýva

$$90^\circ + \angle XYS + \angle XYS = 180^\circ,$$

$$\angle XYS + \angle XYS = 90^\circ,$$

$$\angle XYS = 90^\circ - \angle XYS.$$

Z trojuholníka YFM vieme, že

$$(\angle XYS - \angle XYS) + (\angle XYS + \angle XYS) + (\angle XYS - \angle XYS) = 180^\circ,$$

$$2\angle XYS + 2\angle XYS - 2\angle XYS = 90^\circ,$$

čo môžeme vykrátiť dvomi a dostaneme

$$\angle XYS + \angle XYS - \angle XYS = 90^\circ,$$

$$\angle XYS - \angle XYS = 90^\circ - \angle XYS.$$

Spojením s predchádzajúcou rovnicou dostaneme

$$\angle XYS - \angle XYS = 90^\circ - \angle XYS = \angle XYS,$$

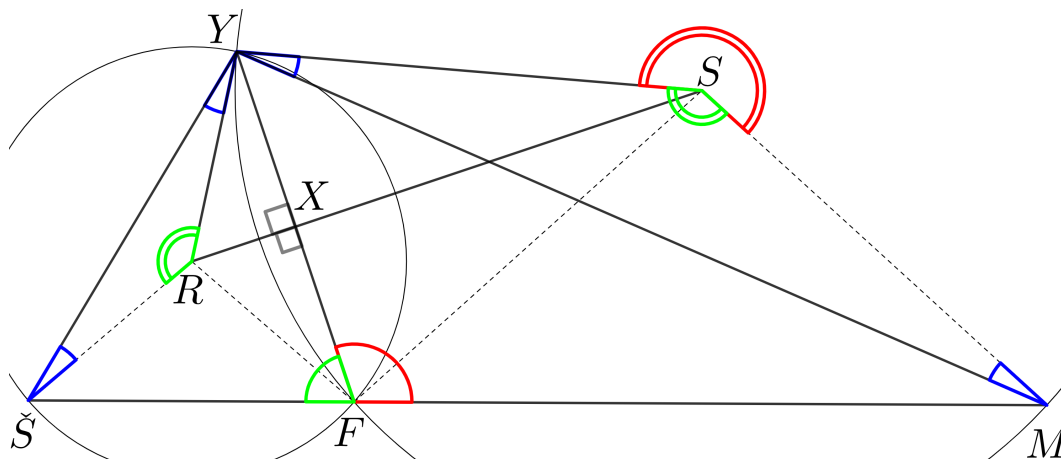
$$\angle XYS - \angle XYS = \angle XYS.$$

Ukázali sme teda, že platí rovnosť $|\angle RSY| = |\angle ŠMY|$.

Alebo sme si všimli, že $\angle FMY$ je obvodový ku stredovému $\angle FSY$ a analogicky vyvodili rovnosť $|\angle YSX| = |\angle YMF|$, ktorá je ekvivalentná s rovnosťou $|\angle RSY| = |\angle ŠMY|$.

Ukázali sme rovnosť dvoch vnútorných uhlov trojuholníkov $MYŠ$ a SYR . Z vety *uu* o podobnosti trojuholníkov vyplýva, že trojuholníky $MYŠ$ a SYR sú podobné.

Avšak podobnosť trojuholníkov $MYŠ$ a SYR sme nemuseli dokazovať práve cez rovnosti $|\angle YRS| = |\angle YŠM|$, $|\angle RSY| = |\angle ŠMY|$ – jednu z nich sme mohli nahradiť rovnosťou $|\angle SYR| = |\angle MYŠ|$. Skúsme sa teraz na ňu pozrieť.



Môžeme si všimnúť, že $\angle SFY$ je obvodový ku stredovému $\angle SRY$, a teda platí rovnosť $|\angle SRY| = 2|\angle SFY|$. Rovnako aj $\angle YFM$ je obvodový ku $360^\circ - \angle YSM$, a teda platí rovnosť $360^\circ - |\angle YSM| = 2|\angle YFM|$.

Vieme, že

$$\begin{aligned} \angle + \angle &= 180^\circ, \\ 2\angle + 2\angle &= 360^\circ, \\ 2\angle &= 360^\circ - 2\angle, \\ |\angle YSM| &= 360^\circ - 2\angle, \\ |\angle YSM| &= 2\angle. \end{aligned}$$

Keďže sú oba trojuholníky YSM a $YRŠ$ rovnoramenné s rovnakým uhlom oproti základni, tak budú mať rovnaké uhly aj pri základni, takže $|\angle SYR| = |\angle MYS|$, z čoho vyplýva $|\angle SYR| = |\angle RYM| + |\angle MYS| = |\angle SYR| + |\angle RYM| = |\angle MYŠ|$.

Teraz sa ostáva ešte zamyslieť ako by vyzeralo riešenie, ak by sme si bod F umiestnili niekde inde. Ak by sa F posunulo bližšie k $Š$, tak by sa mohlo stať, že by R ležalo mimo trojuholníka $ŠMY$ a S vo vnútri alebo pod $MŠ$. Ešte vieme F posunúť bližšie ku M , v takom prípade by S ležalo mimo trojuholníka $ŠMY$ a R pod $MŠ$. V takomto prípade by postup riešenia vyzeral analogicky ku našej konfigurácii (resp. by sme vymenili metódy postupu pre jednotlivé uhly, keďže uhly sa nám preklopiť na doplnok do 180° resp. 360°). Ak by sme F umiestnili do päty výšky na stranu $ŠM$, tak by body R, S postupne ležali na stranách $ŠY, MY$ a RS by bolo rovnobežné s $ŠM$. Jednalo by sa teda o triviálny prípad. Ešte na konfiguráciu môže mať vplyv pôvodný trojuholník $MYŠ$, avšak aj tu budeme postupovať analogicky, keďže sa nám len preklopiť niektoré uhly.

2.5 Kúpim Majstrovskú Stratégiu ($\kappa \leq 8$)

Zadanie. Devil Voršiper ma vyzval na súboj so šachovými vežami. Súboj má nasledujúce pravidlá: Každý vežtec má v jednom z protiláhlych rohov šachovnice 8×8 svoju vežu. Veža chráni celý svoj riadok a stĺpec. Vežtec môže svoju vežu presunúť vodorovne alebo zvislo tak, aby neprekročil stĺpec ani riadok, ktorý chráni súperova veža. Vežtec, ktorý už nevie svoju vežu pohnúť, prehráva. Je výhodnejšie, aby som začínal či mám prenechať prvý ťah Voršiperovi? Kúpim víťaznú stratégiu pre niektorého z vežtcov alebo dôkaz, že ani jeden takú nemá.

Riešenie.

opravuje M&M (marek.murin@trojsten.sk)

Vzorové riešenie tejto úlohy si môžeš pozrieť aj ako [video](https://www.youtube.com/KorMatSem) na našom YouTube kanáli www.youtube.com/KorMatSem.

Návod, ako prísť na dôležité fakty

Najprv si vyskúšame, čo sa stane, keď hráme hru na šachovnici 2×2 . Očividne prehrá ten hráč, ktorý začína, pretože nemá miesto, kam posunúť svoju vežu. Tí, čo teraz očakávajú šachovnicu 3×3 , si budú musieť trochu počkať.

Hrajme na šachovnici $n \times n$ a predpokladajme, že sa hra dostala v nejakom momente do bodu, že biela veža a čierna veža sú obe na podšachovnici¹ 2×2 , samozrejme diagonálne oproti sebe. Táto pozícia je tiež prehrávajúca pre začínajúceho hráča (pokračujúceho – pretože sa pozeráme na situáciu uprostred hry). Prečo? Nech je začínajúci (pokračujúci) hráč na políčku (a, b) a svoju pôvodnú štartovaciu pozíciu mal na $(1, 1)$. Potom začínajúci (pokračujúci) hráč má možné ťahy: ísť o $x \in \{1, \dots, a-1\}$ jedným smerom alebo o $y \in \{1, \dots, b-1\}$ druhým smerom. Dokopy teda má na výber z $a+b-2$ ťahov. Teraz však protihráč spraví rovnaký ťah o x resp. y v tom istom smere a dosiahne situáciu, kde sú opäť na podšachovnici 2×2 , a pôvodne začínajúci, teraz už pokračujúci, hráč je opäť na ťahu. Miesta, kam sa môže veža pohnúť, bude v každom ďalšom ťahu menej, keďže každým ťahom sa k okraju šachovnice posunie bližšie. Takto to však nemôže pokračovať do nekonečna, pretože počet možností $a+b-2$ sa bude stále znižovať, až začínajúci (pokračujúci) hráč skončí na $(1, 1)$ a prehrá. Podobne sa dá argumentovať aj prípad, kedy hráčova štartovacia pozícia je (n, n) .

Dobre teda, takže ak niekto vie dosiahnuť vo svojom ťahu podšachovnicu 2×2 a nechať na ťahu súpera, tak vyhral. Ako to môže niektorý hráč doceliť? Podšachovnicu 2×2 vieme jedným ťahom vytvoriť z ľubovoľnej podšachovnice $2 \times k$ alebo $k \times 2$ pre ľubovoľné $k \in \{3, 4, \dots, n\}$. Takže všetky tieto pozície sú vyhrávajúce pre hráča, ktorý bude na ťahu na podšachovnici $2 \times k$ alebo $k \times 2$.

Dobre, takže čo s tou šachovnicou 3×3 ? Hráč, ktorý začne, musí z tejto šachovnice nutne vytvoriť buď pozíciu 2×3 alebo 3×2 . Preto šachovnica 3×3 je prehrávajúca pre začínajúceho hráča. Tak, ako sme v druhom odstavci dokázali, že „ustupovanie“ pre podšachovnicu 2×2 nezmení prehrávajúcosť pozície, tak aj pre podšachovnicu 3×3 to bude rovnaké. Všeobecný dôkaz príde neskôr. Ako sa dostaneme do podšachovnice 3×3 ? Z ľubovoľnej podšachovnice $3 \times k$, kde $4 \leq k \leq n$. Ako sa dostaneme do $3 \times k$? Z $k \times k$. A tak ďalej.

Dôkaz

Nech začína D. V. Označme si políčka šachovnice od jeho rohu $(1, 1)$ po môj roh (n, n) . Dokážem, že pre mňa budú vyhrávajúce pozície tie, keď moja vzdialenosť na prvej a druhej súradnici od D. V. je rovnaká a D. V. je na ťahu, v preklade naše veže sú v rohu štvorca.

¹ Podšachovnicou $m \times n$ budeme rozumieť obdĺžnikovú časť hracej plochy, v ktorej jednom rohu je jedna veža a v protiláhlom druhá.

Nech je v nejakom momente hry dosiahnutá taká pozícia, nech D. V. je ťahu na políčku (a, b) a ja som na $(a + k, b + k)$. D. V. sa môže pohnúť na ľubovoľné políčko z množiny

$$\{(a', b), a' \in \{1, 2, \dots, a - 1, a + 1, \dots, a + k - 1\}\} \cap \\ \cap \{(a, b'), b' \in \{1, 2, \dots, b - 1, b + 1, \dots, b + k - 1\}\}.$$

Ak D. V. ťahal tak, že $a' > a$, resp. $b' > b$, tak moja odpoveď bude ťah na $(a + k, b + k + a - a')$, resp. $(a + k + b - b', b + k)$. Tým vznikne štvorec menšej veľkosti. Síce bližší roh, teda roh veže D.V., bude ďalej od súradníc $(1, 1)$, avšak moja veža bude bližšie k rohu $(1, 1)$ ako bola v predošlom ťahu.

Ak D. V. ťahal tak, že $a' < a$, resp. $b' < b$ pre príslušné ťahy, tak moja odpoveď bude ťah na $(a' + k, b + k)$ resp. $(a + k, b' + k)$. Tým vznikne opäť štvorec rovnakej veľkosti a obe veže budú bližšie k súradniciam $(1, 1)$.

Lenže ťahy oboch typov vie robiť D. V. iba obmedzený počet krát, a preto vyhrám. Inými slovami, ja sa svojim ťahom vždy priblížim k rohu $(1, 1)$ a vždy viem spraviť ďalší ťah, teda raz musí nastať situácia, že D. V. už nemá ako ťahať.

2.6 Kúpim Mlynček, Súrne!

Zadanie. Od finalistu majstrovstiev sveta v mletí maku som sa dozvedel, že mletie maku výrazne zvyšuje integritenčný kvocient. Tiež by som sa to chcel naučiť. Preto kúpim mlynček. Súrne.

Máme funkciu f , ktorá každému prirodzenému číslu m priradí reálne číslo $f(m)$. Vieme o nej, že pre všetky kladné celé a, b, n , ktoré spĺňajú $a + b = 2^n$, platí

$$f(a) + f(b) = n^2.$$

Určte $f(2022)$.

Riešenie. opravujú **Kubo P.** (jakub.poljovka@trojsten.sk) a **Mišo M.** (michal.molnar@trojsten.sk)

Vzorové riešenie tejto úlohy si môžeš pozrieť aj ako [video](https://www.youtube.com/KorMatSem) na našom YouTube kanáli www.youtube.com/KorMatSem.

Úloha sama o sebe vyzerá pomerne zákerne. Máme nejakú funkciu f , do ktorej vieme dosádzať prirodzené čísla, a chceme určiť, čo dostaneme po dosadení 2022. K dispozícii máme len jeden vzťah, ktorý navyše platí len pre špeciálne hodnoty. Na zistenie $f(2022)$ nám tak nezostáva nič iné, ako nájsť vhodné prirodzené číslo x , aby sme mohli využiť, že $f(2022) + f(x) = n^2$.

Tu prichádza otázka, čo ďalej? Previedli sme fakt, že nepoznáme hodnotu $f(2022)$ na fakt, že nepoznáme $f(x)$. Vieme nájsť nejaké ďalšie prirodzené číslo, zopakovať postup pre x a dostaneme novú neznámu hodnotu. Aby sme sa dostali k nejakým výsledkom, chceme ideálne nájsť číslo (alebo čísla), pre ktoré vieme určiť hodnotu funkcie. Po chvíli uvažovania si všimneme, že ak $a = b = 2^{n-1}$, vzťah pre funkčné hodnoty bude

$$2 \cdot f(2^{n-1}) = n^2.$$

Odtiaľ už vieme určiť, že $f(2^{n-1}) = \frac{1}{2}n^2$. Skúsme sa teda dopracovať od 2022 k nejakej mocnine dvoch.

Budeme postupovať nasledovne: pre nejaké x , ktoré nie je mocninou 2 nájdeme nejaké $y < x$ tak, aby $x + y$ bola mocnina 2. A zopakujeme s číslom y . Toto vieme spraviť vždy. Keďže nám to však stačí pre pár čísel, dokazovať to nebudeme, proste to vyskúšame. Tento postup nás dostane k postupne menším a menším kladným celým číslam,

takže ak sa nepritrafi po ceste nejaká mocnina 2, dostaneme sa až k číslu 1. To môžeme tiež považovať za mocninu 2 ($1 = 2^0$), navyše $1 + 1 = 2^1$, takže sa k hodnote $f(1)$ dopočítame.

Prejdime však k činom. Postup vyššie nám dáva:

- $2022 + 26 = 2^{11}$,
- $26 + 6 = 2^5$,
- $6 + 2 = 2^3$,
- $2 = 2^1$.

Vieme teda dopočítať, že $f(2) = \frac{1}{2}2^2 = 2$. Potom pekne od konca dostaneme

- $f(6) = 3^2 - f(2) = 9 - 2 = 7$,
- $f(26) = 5^2 - f(6) = 25 - 7 = 18$,
- $f(2022) = 11^2 - f(26) = 121 - 18 = 103$.

Odpoveď: $f(2022) = 103$.

2.7 Kúpim Mokrú Studňu

Zadanie. Doma v kuchyni mám nové štvorčekové dlaždice. Nemám doma iný zdroj vody, tak potrebujem studňu. Nie však leďajakú. Aby sa mi nepokazilo feng-šuej, musí spĺňať nasledujúce podmienky:

1. Musí mať tvar n -uholníka.
2. Vrcholy tohto n -uholníka musia ležať v mrežových bodoch štvorčkovej siete so štvorčkami so stranou dĺžky 1.
3. Keď si napíšeme druhé mocniny dĺžok jeho strán od najmenej po najväčšiu, dostaneme n po sebe idúcich prirodzených čísel.

Existuje taká studňa pre

- $n = 2022$?
- $n = 3$?

Riešenie. opravujú Michal Staník (michal.stanik@trojsten.sk) a Jozef Rajník (jozef.rajnik@trojsten.sk)

Vzorové riešenie tejto úlohy si môžeš pozrieť aj ako [video](https://www.youtube.com/KorMatSem) na našom YouTube kanáli www.youtube.com/KorMatSem.

Aby sa nám ľahšie pracovalo, zavedieme si v našej štvorčkovej sieti súradnicový systém tak, že mrežové body sú práve body s celočíselnými súradnicami.

Súradnice vrcholov n -uholníka môžeme označiť ako $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Potom druhé mocniny dĺžok jeho strán, ktoré v úlohe skúmame, sú $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$ a tak ďalej. Môžeme si všimnúť, že každá dĺžka strany na druhú je súčtom dvoch štvorcov (druhých mocnín celých čísel).

Tí z vás, ktorí už majú nejaké skúsenosti s počítaním so zvyškami, asi vedia, že druhé mocniny čísel dávajú po delení štyrmi iba zvyšky 0 a 1. Je to tak kvôli tomu, že zvyšok druhej mocniny závisí len od zvyšku samotného čísla. Keď si umocníme všetky možné zvyšky od 0 do 3, tak dostaneme ako výsledky iba zvyšky 0 a 1. Ak neveríte,

môžete si zobrať ľubovoľné číslo, vydeliť ho štyrmi so zvyškom a počítať. Vyjde vám jedna z týchto možností:

$$\begin{aligned}(4k)^2 &= 16k^2 = 4(4k^2) + 0, \\(4k + 1)^2 &= 16k^2 + 8k + 1 = 4(4k^2 + 2k) + 1, \\(4k + 2)^2 &= 16k^2 + 16k + 4 = 4(4k^2 + 4k + 1) + 0, \\(4k + 3)^2 &= 16k^2 + 24k + 9 = 4(4k^2 + 6k + 2) + 1.\end{aligned}$$

Keď jeden štvorec môže mať zvyšok po delení štyrmi 0 alebo 1, súčet dvoch štvorcov môže mať zrejme zvyšok iba 0, 1 alebo 2. Ak súčty dvoch druhých mocnín (druhé mocniny dĺžok strán) tvoria postupnosť po sebe idúcich čísel a sú aspoň štyri, táto postupnosť nutne bude obsahovať aj číslo so zvyškom 3 po delení 4. Takéto číslo ale nevieme vyjadriť ako súčet dvoch druhých mocnín, čo je spor. To znamená, že pre $n \geq 4$ (a teda aj špeciálne pre $n = 2022$) vhodná studňa neexistuje.

Ostáva nám prípad $n = 3$. Stále platí, že našou postupnosťou nechceme trafiť číslo so zvyškom 3 po delení 4, takže štvorce dĺžok strán musia mať postupne zvyšky 0, 1 a 2, čiže byť tvaru $4k$, $4k + 1$ a $4k + 2$ pre nejaké nezáporné číslo k . Ak všetky tri druhé mocniny dĺžok strán sčítame, musí platiť:

$$\begin{aligned}((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2) + ((x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2) + ((x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2) &= 4k + (4k + 1) + (4k + 2), \\2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 - 2y_1y_2 - 2y_1y_3 - 2y_2y_3 &= 12k + 3.\end{aligned}$$

Keď sme výrazy roznásobili, na ľavej strane vznikli členy tvaru $-2x_i x_j$ a $-2y_i y_j$. Okrem toho nám vznikli druhé mocniny súradníc ($2x_i^2$ a $2y_i^2$) – každá súradnica na druhú práve dvakrát. Ľavá strana je tak párna, ale na pravej máme $12k + 3$, čo je nepárne. Párne číslo sa nemôže rovnať nepárnemu, a teda aj v tomto prípade má inzerent smolu a vyhovujúca studňa neexistuje.

2.8 Kúpim Metrové Súvetie

Zadanie. Môj problém spočíva v tom, že neviem, kedy ukončiť vetu, pretože sa v nej vždy točím do kruhu, ako v prípade trojuholníka ABC , ktorého vpísaná kružnica sa dotýka strán AB a AC postupne v bodoch D a E a ktorého pripísaná kružnica k strane BC sa priamok AB a AC dotýka postupne v bodoch F a G , pričom osi vnútorných uhlov $\sphericalangle CBA$ a $\sphericalangle ACB$ pretínajú priamku DE v bodoch X a Y , a osi tých istých vonkajších uhlov pretínajú priamku FG v bodoch Z a W , čo ma núti dať vám za úlohu dokázať, že X , Y , Z a W ležia na kružnici.

Riešenie.

opravuje **Lukáš** (lukas.gaborik@trojsten.sk)

V zadaní máme kružnicu vpísanú a pripísanú trojuholníku ABC , ako aj osi uhlov tohto trojuholníka, na ktorých stredy spomínaných kružníc ležia. Vyzerá to tak, že budú pomerne dôležité v riešení, podme si ich teda označiť – stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC označme ako I a stred kružnice pripísanej k strane BC trojuholníka ABC označme ako E_a .

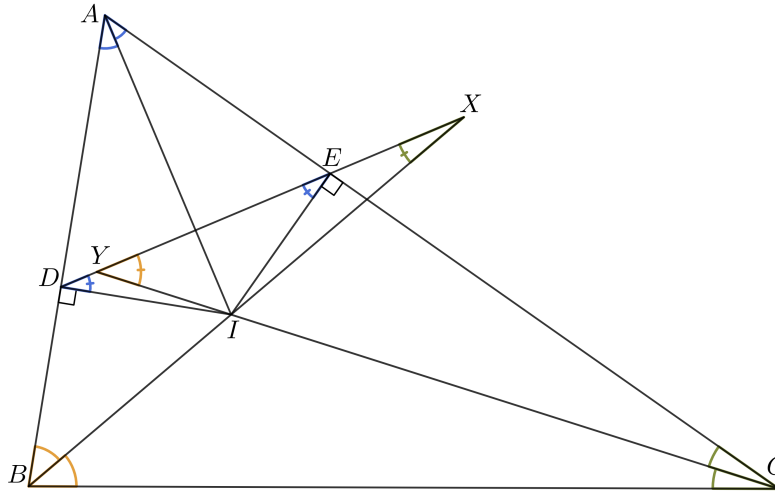
Všimnime si, že naše body nám tvoria dve skupinky, a to

- body týkajúce sa kružnice vpísanej – A, B, C, I, D, E, X, Y ,
- body týkajúce sa kružnice pripísanej – A, B, C, E_a, F, G, Z, W ,

pričom tieto dve skupinky nemajú medzi sebou až tak veľa prepojení. Skúsme teda skúmať tieto skupinky oddelene – obrázky budú prehľadnejšie a ľahšie budeme vidieť, čo sa nám v nich deje.

Body súvisiace s vpísanou kružnicou

Keďže kružnica vpísaná ABC sa dotýka strany AB v bode D , musí byť DI kolmé na AB . To ale znamená, že si bod D vieme predefinovať tak, že ide o pätu kolmice z bodu I na stranu AB . Analogicky vieme E predefinovať ako pätu kolmice z I na AC . To ale pre nás znamená, že vpísanú kružnicu môžeme úplne zahodiť, čím si opäť spríhľadníme obrázok.



Keďže $|\angle ADI| = |\angle AEI| = 90^\circ$, je štvoruholník $ADIE$ tetivový. Potom ale z obvodových uhlov nad tetivami DI a EI a faktu, že I leží na osi uhla $\angle BAC$ máme, že $|\angle IED| = |\angle IAD| = |\angle IAE| = |\angle IDE|$. Ďalej si všimnime, že zo súčtu uhlov trojuholníka ABC vieme dostať $2\angle A + 2\angle B + 2\angle C = 180^\circ \iff \angle A + \angle B + \angle C = 90^\circ$.

Pozrime sa ďalej na trojuholník BDX . Aby sa jeho uhly nasčítali na 180° , musí platiť

$$|\angle BXD| = 180^\circ - |\angle BDX| - |\angle DBX| = 180^\circ - (90^\circ + \angle A) - \angle C = 90^\circ - \angle A - \angle C = \angle B.$$

To ale znamená, že $|\angle EXI| = \angle C = |\angle ECI|$, a teda z obvodových uhlov nad tetivou EI máme, že $EICX$ je tetivový. Potom ale $|\angle BXC| = |\angle IXC| = |\angle IEC| = 90^\circ$, a teda X leží na Tálesovej kružnici nad priemerom BC .

To, že aj Y leží na Tálesovej kružnici nad BC , ukážeme obdobne. Pozrime sa na trojuholník CEY . Aby sa jeho uhly nasčítali na 180° , musí platiť

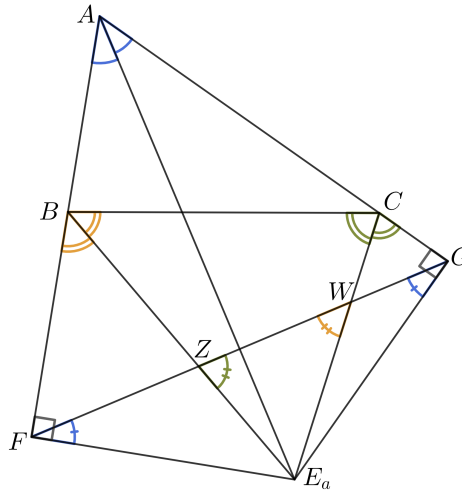
$$|\angle CYE| = 180^\circ - |\angle CEY| - |\angle ECY| = 180^\circ - (90^\circ + \angle A) - \angle B = 90^\circ - \angle A - \angle B = \angle C.$$

To ale znamená, že $|\angle DYT| = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - |\angle DBI|$, a teda z obvodových uhlov nad tetivou DI máme, že $BDYT$ je tetivový. Potom ale $|\angle BYC| = |\angle BYI| = |\angle BDI| = 90^\circ$, a teda aj Y leží na Tálesovej kružnici nad priemerom BC .

No, a tým padli už skoro všetky podstatné myšlienky riešenia. Síce sme sa ešte nepozreli na body pripísanej kružnice, no vpísaná a pripísaná kružnica majú veľmi podobné vlastnosti. Môžeme sa teda domnievať, že ak sa pokúsime zduplicovať vyššie uvedený postup aj pre body pripísanej kružnice, podarí sa nám úlohu doriešiť. Poďme sa o to pokúsiť.

Body súvisiace s pripísanou kružnicou

Keďže kružnica pripísaná k strane BC sa dotýka priamky AB v bode F , musí byť FE_a kolmé na AB . To ale znamená, že si bod F vieme predefinovať tak, že ide o päť kolmice z bodu E_a na stranu AB . Analogicky vieme G predefinovať ako päť kolmice z E_a na AC . To ale pre nás znamená, že pripísanú kružnicu môžeme úplne zahodiť, čím si opäť sprchládnime obrázok.



Keďže $|\angle AFE_a| = |\angle AGE_a| = 90^\circ$, je štvoruholník AFE_aG tetivový. Potom ale z obvodových uhlov nad tetivami FE_a a GE_a a faktu, že E_a leží na osi uhla $\angle BAC$ máme, že $|\angle E_aGF| = |\angle E_aAF| = |\angle E_aAG| = |\angle E_aFG|$. Ďalej si všimnime, že zo súčtu uhlov trojuholníka ABC vieme dostať $2\angle A + (180^\circ - 2\angle B) + (180^\circ - 2\angle C) = 180^\circ \iff \angle A + \angle B - \angle C = 90^\circ$.

Pozrime sa ďalej na trojuholník BFZ . Aby sa jeho uhly nasčítali na 180° , musí platiť

$$|\angle BZF| = 180^\circ - |\angle BFZ| - |\angle FBZ| = 180^\circ - (90^\circ - \angle A) - \angle C = 90^\circ + \angle A - \angle C = \angle B.$$

To ale znamená, že $|\angle GZE_a| = \angle B = |\angle GCE_a|$, a teda z obvodových uhlov nad tetivou E_aG máme, že CGE_aZ je tetivový. Potom ale $|\angle BZC| = 180^\circ - |\angle E_aZC| = 180^\circ - |\angle E_aGC| = 90^\circ$, a teda Z leží na Tálesovej kružnici nad priemerom BC .

To, že aj W leží na Tálesovej kružnici nad BC , ukážeme obdobne. Pozrime sa na trojuholník CGW . Aby sa jeho uhly nasčítali na 180° , musí platiť

$$|\angle CWG| = 180^\circ - |\angle CGW| - |\angle GCW| = 180^\circ - (90^\circ - \angle A) - \angle C = 90^\circ + \angle A - \angle C = \angle B.$$

To ale znamená, že $|\angle FWE_a| = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - |\angle FBE_a|$, a teda z obvodových uhlov nad tetivou FE_a máme, že BFE_aW je tetivový. Potom ale $|\angle BWC| = 180^\circ - |\angle BWE_a| = 180^\circ - |\angle BFE_a| = 90^\circ$, a teda aj W leží na Tálesovej kružnici nad priemerom BC .

Máme teda, že W, X, Y, Z ležia všetky na Tálesovej kružnici nad priemerom BC , čo sme chceli dokázať.

Čo ak by obrázok vyzeral inak?

Ak ste si porovnávali pasáže s bodmi vpísanej a pripísanej kružnice, asi ste si všimli, že sú skoro rovnaké, až na pár detailov – niekde sa namiesto α dostalo $180^\circ - \alpha$. To bolo spôsobené tým, že bod I bol medzi B a X , kdežto vzhľadom na E_a sú B a Z na rovnakej „strane“ priamky. Môžete si preto premyslieť, že ak by bod X ležal vnútri úsečky DE (resp. bod Y mimo nej), tiež by sa nám takto mierne pozmenil dôkaz, no fungoval by stále – totiž, bod X by síce prešiel na druhú stranu bodu E , a teda by $|\angle EXI| = 180^\circ - \angle$, avšak prejde aj na druhú stranu tetivy EI , kvôli čomu sa prevráti cez 180° aj obvodový uhol.

2.9 Kúpim Milión Stužiek

Zadanie. *Môj hrad má 43 vežičiek rozložených pravidelne na kružnici. Na jeho výzdobu potrebujem kúpiť veľa stužiek. Každé dve veže totiž prepojim práve jednou, modrou alebo červenou. Z každej veže bude viesť práve 20 červených a 22 modrých stužiek. Trojicu veží nazveme modrým (resp. červeným) triom, ak medzi nimi vedú len stužky modrej (resp. červenej) farby. Predpokladajme, že na mojom hrade je 2022 modrých trií. Koľko je červených trií? Uveďte všetky možnosti.*

Riešenie. opravujú **David** (david.belobrad@trojsten.sk) a **Skaloš** (jakub.skalos@trojsten.sk)

Preformulujme si na začiatok zadanie do jazyka matematiky: náš hrad je graf so 43 vrcholmi, kde všetky vrcholy ležia na kružnici a z každého vrcholu vychádza práve 20 červených a 22 modrých hrán.

Tým, že z každého vrcholu vychádza práve 22 hrán modrej farby, tak vieme vybrať $\binom{22}{2}$ dvojíc, pričom spojnice ich rozdielnych vrcholov bude tvoriť tretiu stranu trojuholníka. Toto vieme spraviť pre všetkých 43 vrcholov a dostaneme $43 \cdot \binom{22}{2} = 9\,933$ trojuholníkov. No a tieto trojuholníky sú buď celé modré (ďalej len 3_m0_c) alebo s dvomi modrými stranami a jednou červenou (ďalej len 2_m1_c). V tomto momente si treba uvedomiť, že celé modré trojuholníky sme započítali vždy 3-krát, pretože 2 modré hrany vychádzajú z každého ich vrcholu. Potom musí platiť, že

$$9\,933 = 3 \cdot 3_m0_c + 2 \cdot 2_m1_c = 3 \cdot 2\,022 + 2 \cdot 1_c.$$

Odtiaľ ako riešenie lineárnej rovnice dostaneme $2_m1_c = 3\,867$. Teraz budeme opakovať postup zo začiatku, ale nebudeme voliť 2 modré hrany. Namiesto toho budeme v každom vrchole voliť jednu modrú a jednu červenú hranu. V každom vrchole je takýchto možností $22 \cdot 20 = 440$, teda vo všetkých vrcholoch $43 \cdot 22 \cdot 20 = 18\,920$. Dostali sme tak trojuholníky s 2 modrými a 1 červenou stranou a 1 modrou a 2 červenými stranami (ďalej len 1_m2_c). Do výsledného súčtu sme ale každý taký trojuholník započítali 2-krát, pretože v trojuholníku 1_m2_c existujú práve 2 vrcholy také, že z nich vychádza 1 modrá a 1 červená hrana. Obdobné tvrdenie platí aj pre trojuholníky s ofarbením 2_m1_c . Z toho dostávame rovnicu v tvare

$$18\,920 = 2 \cdot 2_m1_c + 2 \cdot 1_m2_c = 2 \cdot 3\,867 + 2 \cdot 1_m2_c,$$

ktorej riešenie bude $1_m2_c = 5\,593$. Posledný raz implementujeme metodiku zo začiatku, ale tento raz budeme vybrať 2 červené hrany, ktorých je $\binom{20}{2}$. Dobudovaním trojuholníkov dostaneme úplne červené trojuholníky (červené triá, ďalej len 0_m3_c) a 1_m2_c . Takýchto trojuholníkov bude $43 \cdot \binom{20}{2}$, ale opäť ako pri úplne modrých trojuholníkoch, tak aj tu sme započítali 0_m3_c až 3-krát. Zostáva nám posledná rovnica

$$8\,170 = 1_m2_c + 3 \cdot 0_m3_c = 5\,593 + 3 \cdot 0_m3_c,$$

ktorej riešením je $0_m3_c = 859$, čo je hľadaným riešením.

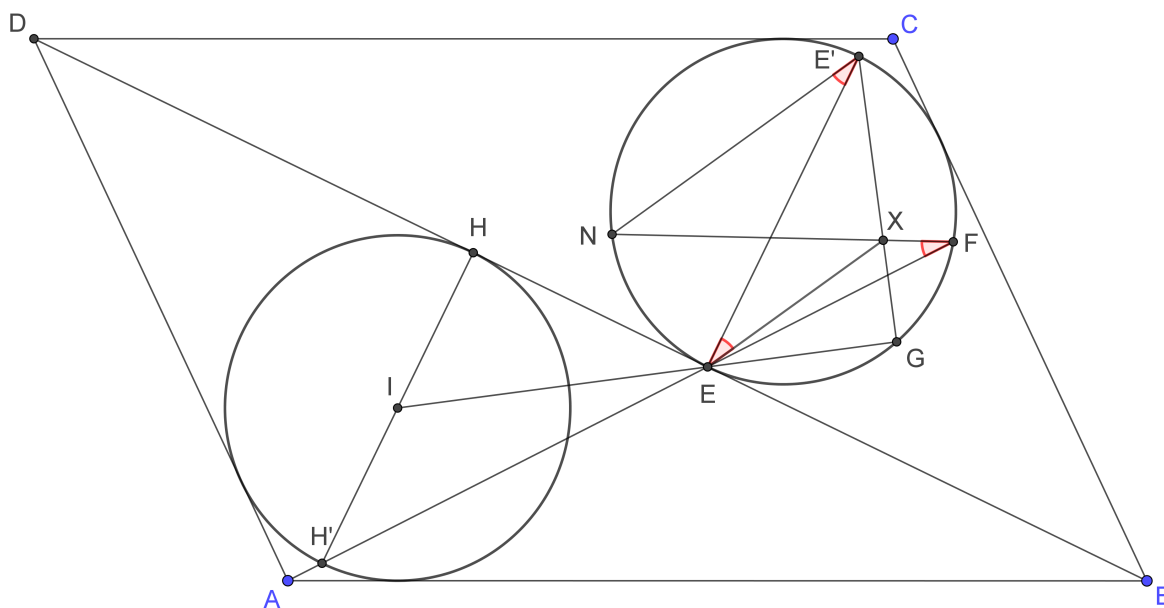
2.10 Kúpim Mäkké Spoluhlásky

Zadanie. Bol som v Lidli kupovať písmenká do šošovicovej polievky, ale nemali tam ani mäkké F. Potrebujem teda doplniť zásoby mäkkých písmeniek.

Je daný rovnobežník $\check{A}\check{B}\check{C}\check{D}$. Označme $\check{I}$ stred kružnice vpísanej trojuholníku $\check{A}\check{B}\check{D}$ a $\check{\omega}$ kružnicu vpísanú trojuholníku $\check{B}\check{C}\check{D}$, ktorá sa dotýka strany $\check{B}\check{D}$ v bode $\check{E}$. Priamky $\check{A}\check{E}$ a $\check{I}\check{E}$ pretínajú $\check{\omega}$ postupne v bodoch $\check{F}$ a $\check{G}$.

Nech $\check{E}'$ je bod ležiaci oproti $\check{E}$ na $\check{\omega}$. Os uhla $\check{G}\check{E}\check{E}'$ pretína $\check{G}\check{E}$ v bode $\check{X}$. Dokážte, že stred kružnice opísanej trojuholníku $\check{E}\check{X}\check{F}$ leží na priamke $\check{B}\check{D}$.

Riešenie. opravujú Michal (michal.pecho@trojsten.sk) a Pedro (peter.sukenik@trojsten.sk)



Z úcty k nášmu ako aj čitateľovmu mentálnemu zdraviu bude toto vzorové riešenie napísané bez diakritiky v matematických označeniach.

Najskôr dokreslíme dôležité body. Označme postupne H bod dotyku kružnice vpísanej trojuholníku ABD so stranou BD , kým H' bude bod presne „oproti“ H v tejto vpísanej kružnici (konštrukcia analogická bodom E, E' v kružnici ω).

Začnime s dôkazom, že A, H', E ležia na priamke. Všimnime si, že bod E je totožný s bodom dotyku kružnice pripísanej trojuholníku ABD vzhľadom na bod A . Je to z dôvodu, že body dotyku vpísanej a pripísanej kružnice na jednu stranu trojuholníka sú symetrické vzhľadom na stred danej strany. To body H a E spĺňajú, pretože trojuholníky ABD a CDB sú stredovo súmerné podľa stredy BD a H, E sú body dotyku vpísaných kružníc so stranou BD v jednotlivých trojuholníkoch. Ak teraz uvažujeme rovnobežku na stranu BD prechádzajúcu bodom H' (ktorá je dotyčnicou ku kružnici vpísanej ABD) a označíme postupne B', D' jej priesečníky s priamkami AB, AD , potom kružnica vpísaná ABD je kružnicou pripísanou trojuholníku $AB'D'$ vzhľadom na A . Lenže trojuholníky $AB'D'$ a ABD sú podobné a zobrazujú sa na seba v rovnoľahlosti so stredom v bode A . Preto v tej istej rovnoľahlosti sa tiež zobrazujú body dotyku pripísaných kružníc vzhľadom k bodu A . To sú práve body H' a E , a teda musia ležať s A na priamke.

V riešení budeme pokračovať dvoma spôsobmi. Prvý využíva harmonický štvorpomer, druhý využíva symediány.

Riešenie využívajúce harmonický štvorpomer

Všimnime si, že $EE' \perp BD$. Aby sme ukázali, že stred kružnice opísanej trojuholníku EXF leží na priamke BD , nám stačí ukázať, že sa táto kružnica dotýka priamky EE' v bode E .

Označme Q nevlastný bod priamky HH' . Všimnime si, že $HH' \parallel EE'$, preto $Q \in EE'$. Keďže I je stredom HH' , platí² $(H', H; I, Q) = -1$. Premietaním cez bod E na kružnicu ω dostávame

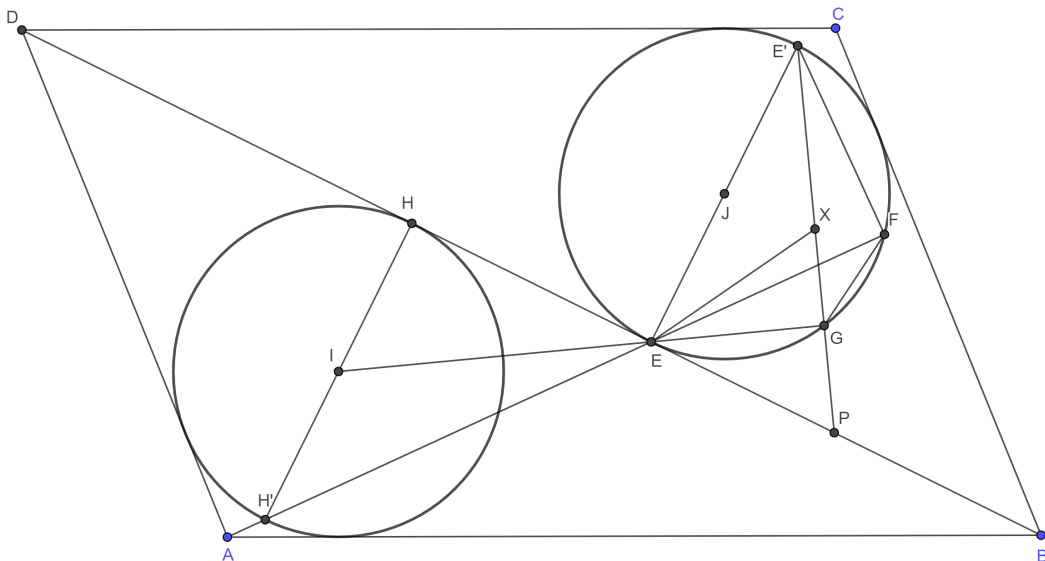
$$(H', H; I, Q) = (EH', EH; EI, EQ) = (F, E; G, E'),$$

z čoho vyplýva, že $FGEE'$ je harmonický štvoruholník a platí $\frac{|FG|}{|FE'|} = \frac{|EG|}{|EE'|}$. Z tejto rovnosti vyplýva, že os uhla GEE' delí stranu GE' v rovnakom pomere ako os uhla GFE' , z čoho vyplýva, že X leží na osi uhla GFE' . Označme antišvrčkov bod trojuholníka EGE' k bodu E ako N . Keďže FX je os uhla GFE' , N bude ako švrčkov bod trojuholníka $E'FG$ na FX ležať. Zároveň bude N ležať aj na osi vonkajšieho uhla GEE' , teda platí $EN \perp EX$, pričom EE' je priemer kružnice, preto $EN \perp NE'$, z čoho vyplýva $NE' \parallel EX$. Teraz už jednoduchým uhlením dokážeme, že sa kružnica opísaná trojuholníku EXF dotýka priamky EE' v bode E . Totiž,

$$|\angle EFX| = |\angle EFN| = |\angle EE'N| = |\angle E'EX|,$$

z čoho vyplýva, že uhol $E'EX$ je úsekový k uhlu EFX , čím je dôkaz hotový.

Riešenie využívajúce symediány



Po chvíli hrania sa s konfiguráciou a prípadnom narysovaní si obrázka si rýchlo všimneme, že stred kružnice opísanej trojuholníku EXF vskutku leží na priamke BD , ale možno trochu viac prekvapivo, že leží tiež na priamke

²Ak nepoznáš dvojpomer, pozri si https://mathcsr.org/articles/problemsolving/Vol2_No3/harmonic-geometry

$E'XG$. Pokúsime sa teda dokázať, že priesečník priamok BD a $E'G$ s označením P je stredom kružnice opísanej trojuholníku EXF .

Stačí nám ukázať, že $|PE| = |PX| = |PF|$. Začneme dôkazom rovnosti $|PE| = |PX|$, ktorá je podstatne jednoduchšia. Je známy fakt, že $|\angle EXP| = |\angle EE'X| + |\angle E'EX|$. Stačí teda ukázať, že to isté platí o uhle XEP . Nakoľko EX je os uhla GEE' , vieme, že $|\angle E'EX| = |\angle XEG|$. Zároveň, keďže EE' je priemerom Ω , vieme, že $EE' \perp EP$, a teda $|\angle E'PE| = 90^\circ - |\angle EE'X|$. Ale keďže zároveň z Tálesovej vety vieme, že $EG \perp E'P$, tak potom nutne $|\angle GEP| = 90^\circ - |\angle E'PE| = |\angle EE'X|$, a teda $|\angle GEP| + |\angle XEG| = |\angle EE'X| + |\angle E'EX|$, čo je ekvivalentné s $|\angle EXP| = |\angle XEP|$, čo sme chceli dokázať.

Teraz sa pozrime na rovnosť $|PE| = |PF|$. Vieme, že PE je dotyčnicou ku kružnici Ω . Preto $|PE| = |PF|$ je ekvivalentné s tvrdením, že PF je tiež dotyčnicou k Ω . Toto by platilo, ak by sa nám podarilo dokázať, že $E'G$ je symediánou³ z E' v trojuholníku $EE'F$. Prečo? Pretože o symediánach je známe, že prechádzajú priesečníkom dotyčníc k opísanej kružnici daného trojuholníka v bodoch rôznych od toho, z ktorého symediána vychádza. V tomto prípade teda dotyčníc k Ω v bodoch E a F .

Ako ukázať, že je nejaká priamka symediánou z nejakého bodu v trojuholníku? Podľa definície, symediána je priamka, ktorá vznikne ako obraz ťažnice v osovej súmernosti podľa osi uhla v trojuholníku (všetko vzhľadom na ten istý fixný bod trojuholníka, napríklad E'). Presne to teda ukážeme o priamke $E'G$. To však nebude také jednoduché a budeme musieť siahnúť na dno našej sofistikovanosti. Potrebovali by sme ukázať, že $E'G$ a ťažnica z bodu E' v trojuholníku $EE'F$ sú osovo súmerné vzhľadom na os uhla $EE'F$. O tejto ťažnici ale nič nevieme a dokresľovať ju do obrázka taktiež nikam nepovedie. Namiesto toho túto ťažnicu nájdeme bez dokresľovania v inom trojuholníku, ktorý ale bude trojuholníku $EE'F$ podobný. Označme postupne H bod dotyku kružnice vpísanej trojuholníku ABD so stranou BD , kým H' bude bod presne „oproti“ H v tejto vpísanej kružnici (konštrukcia analogická bodom E, E' v kružnici Ω).

Očividne, priamka $E'I$ je ťažnicou trojuholníka $EE'H'$ (nezabudni, I je stredom priemeru vpísanej kružnice). Ako už vieme, body A, H', E ležia na priamke čo je dosť fajn, pretože bystré oko zočí, že trojuholníky $EE'H'$ a $EE'F$ potom musia byť podobné. Potom by už len stačilo ukázať, že ťažnica $E'I$ zvierá s ramenami EH' a EH rovnaké uhly, ako zvierá priamka $E'G$ s ramenami $E'E$ a $E'F$, ale obrátene vzhľadom na rolu daných strán v podobnosti trojuholníkov $EE'H'$ a $EE'F$.

Teraz ukážeme, že trojuholníky $EE'H'$ a $EE'F$ sú vskutku podobné. Na to treba iba kúsok uhlenia. Konkrétne, uhly HEH' a FEP sú vrcholové a majú rovnakú veľkosť. Uhly FEP a $EE'F$ sú úsekové a majú tiež rovnakú veľkosť. Podľa vety uu sú teda trojuholníky $EE'H'$ a $EE'F$ naozaj podobné.

Zostáva nám ukázať, že priamky $E'G$ a $E'I$ majú symetrickú rolu vzhľadom na prislúchajúce body E, E' v podobných trojuholníkoch. Uhol IEH' je vrcholový s uhlom FEG a ten je obvodový s uhlom $FE'G$, teda tieto dva uhly majú rovnakú veľkosť. Lenže strana $E'F$ zodpovedá v podobnosti trojuholníkov $EE'H'$ a $EE'F$ strane EH . Teda rovnosť uhlov IEH' a $FE'G$ znamená nie zhodnú, ale symetrickú rolu priamok $E'G$ a $E'I$ v príslušných trojuholníkoch. Teda tieto dve priamky sú osovo súmerné cez os uhla (nie doslova, ale vzhľadom na podobnosť trojuholníkov $EE'H'$ a $EE'F$), a teda $E'G$ musí byť naozaj symediánou. Tým je náš dôkaz ukončený.

³<https://en.wikipedia.org/wiki/Symmedian>