



Riešenia 1. kola zimnej časti

1.1 Kojenecké Močenie Spodkov ($\kappa \leq 1$)

Zadanie. Na ktorú ukrajinskú rieku sa nedá spoľahnúť pri čistení oblečenia, pretože je príliš plytká? Na Dneper.

Starostlivý otecko musel oprat' pláténé plienky v silnom bielidle. Teraz chce plienky prepláchnuť, aby v nich zostala iba malá koncentrácia bielidla. Zo svojich dlhoročných skúseností už vie, že keď plienky žmýka, zostane v nich práve pol litra tekutiny. Preto plienky prepláchal nasledovne: Po tom, ako ich opral v čistom bielidle, ich riadne vyžmýkal, následne ich strčil do vane s 12 litrami čistej vody a riadne ich v nej zamiešal tak, že sa koncentrácia bielidla v plienkach a vo zvyšku vody vyrovnala. Znova ich vyžmýkal a vodu z vane vypustil. Nakoniec napustil do vane 8 litrov čistej vody a plienky v nej zas riadne premiešal, čím zredukoval koncentráciu bielidla na $\frac{1}{k}$. S tým už bol spokojný. Nájdite k .

Riešenie.

opravuje **Mimi** (matej.hanus@trojsten.sk)

Že v plienkach po žmýkaní zostane pol litra tekutiny a boli prané v čistom bielidle, znamená, že v nich po opraní a vyžmýkaní zostalo pol litra čistého bielidla. Potom bolo vo vani 12 litrov vody z vane a pol litra bielidla pôvodom z plienok, po riadnom zamiešaní teda bola vo vani vrátane plienok rovnorodá zmes 12 litrov vody a pol litra bielidla, čiže roztok bielidla s celkovým objemom $\frac{1}{2} + 12 = \frac{25}{2}$ litra a obsahom bielidla $\frac{1}{2}$ litra, a teda s koncentráciou $(\frac{1}{2}) : (\frac{25}{2}) = \frac{1}{25}$. Po následnom vyžmýkaní v plienkach zostalo pol litra takéhoto roztoku, zvyšok roztoku bol vypustený z vane. Nakoniec otecko zmiešal nových 8 litrov čistej vody so spomínaným pollitrom roztoku s koncentráciou bielidla $\frac{1}{25}$. Onen roztok v plienkach tým pádom obsahoval $(\frac{1}{25})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{50}$ litra bielidla. Spolu bolo vzniknutej zmesi po druhom premiešaní $\frac{1}{2} + 8 = \frac{17}{2}$ litra, takže dosiahnutá koncentrácia bielidla bola $(\frac{1}{50}) : (\frac{17}{2}) = \frac{1}{425}$ a $k = 425$.

1.2 Kalendár Mayských Súhvezdí ($\kappa \leq 2$)

Zadanie. Čo americkí domorodci oslavujú na Sviatok práce? Prvého Maya.

Nájdite všetky riešenia násobenia pod sebou tak, aby na mieste každej hviezdičky bola práve jedna cifra a žiadna z vedúcich čísel nebola nulová:

$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 \times \\
 \hline
 \\
 3 2 7 5 \\
 \\
 \times \\
 \hline

 \end{array}$$

Riešenie.

opravujú **Oskar** (oskar.hritz@trojsten.sk) a **Nata** (natalia.cigasova@trojsten.sk)

Najprv si označíme cifry oboch činiteľov nasledovne:

$$\begin{array}{r} A \ B \ C \\ \times D \ E \ F \end{array}$$

Najviac informácií máme o súčine $\overline{ABC} \cdot E = 3275$, preto ním aj začneme. Z tohoto súčinu vyplýva, že cifra E delí číslo 3275. Prvočíselný rozklad 3275 je $5 \cdot 5 \cdot 131$, čo znamená, že jediné cifry, ktoré ho delia, sú 1 a 5. E ale nemôže byť 1, ináč by súčin $\overline{ABC} \cdot E$ bol 3-ciferný, teda $E = 5$. Späť máme $\overline{ABC} \cdot 5 = 3275$, teda $\overline{ABC} = \frac{3275}{5} = 655$. Náš súčin teraz vyzerá takto:

$$\begin{array}{r} 6 \ 5 \ 5 \\ \times D \ 5 \ F \end{array}$$

Ďalej sa pozrieme na cifru D . Zo zadania vieme, že $D \geq 1$. Zároveň zo zadania vieme, že $655 \cdot D$ je 3-ciferné číslo, teda nutne $D \leq 1$, z čoho vyplýva $D = 1$.

$$\begin{array}{r} 6 \ 5 \ 5 \\ \times 1 \ 5 \ F \end{array}$$

Ostáva nám cifra F . Zadanie nám hovorí, že $655 \cdot F$ je 4-ciferné číslo, teda nutne $F \geq 2$. Zároveň vieme, že celkový súčin je 5-ciferné číslo, teda

$$655 \cdot \overline{15F} = 655 \cdot 150 + 655 \cdot F = 98250 + 655 \cdot F.$$

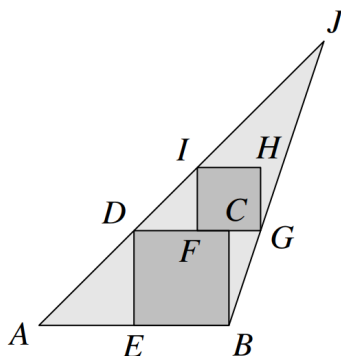
Pri $F \geq 3$ je celkový súčin 6-ciferný, teda $F = 2$. Máme jediné riešenie násobenia pod sebou, a to:

$$\begin{array}{r} 6 \ 5 \ 5 \\ \times 1 \ 5 \ 2 \\ \hline 1 \ 3 \ 1 \ 0 \\ 3 \ 2 \ 7 \ 5 \\ 6 \ 5 \ 5 \\ \hline 9 \ 9 \ 5 \ 6 \ 0 \end{array}$$

1.3 Krabice Máme Skryté ($\kappa \leq 3$)

Zadanie. Krab chcel zbalit krabicu, no už nemal žiadnu voľnú...

Štvorce $BCDE$ a $FGHI$ sú v trojuholníku ABJ tak ako na obrázku 3.1, pričom bod E je stred strany AB , C je stred strany FG , body D a I ležia na strane AJ , bod G leží na strane BJ a bod F leží na strane CD . Akú časť trojuholníka ABJ tvorí štvorec $BCDE$?



Obrázok 3.1: Zbalené krabice

Riešenie.

opravujú **Miloš** (milos.micik@trojsten.sk) a **Vašino** (samuel.vasko@trojsten.sk)

Keďže bod E je stredom strany AB a $BCDE$ je štvorec, musí byť trojuholník DAE rovnoramenný. Nakoľko je uhol pri bode E pravý, musia mať ostatné uhly v trojuholníku DAE 45° . Vďaka rovnobežnosti EB a DC taktiež vieme povedať, že aj trojuholník IDF musí mať uhly pri základni veľkosti 45° , a teda je taktiež rovnoramenný.

Teraz by nás mohlo zaujímať, aká dlhá je strana štvorca $FGHI$ v porovnaní s $BCDE$. Keďže bod C je stredom strany FG , úsečka FC je polovicou zo strany štvorca $FGHI$. Avšak z rovnostrannosti IDF vyplýva, že $|DF| = |FI|$, a teda $|DC| = |IF| + |CF|$, čiže strana veľkého štvorca je rovnako dlhá ako $\frac{3}{2}$ strany malého štvorca (alebo naopak, strana malého štvorca je $\frac{2}{3}$ z veľkého).

Všimnime si, že trojuholníky ABJ a DGJ sú si podobné, nakoľko majú rovnaké uhly. Vieme, že strana AB je dvakrát tak dlhá ako úsečka EB a zistili sme, že strana DG je $\frac{4}{3}$ z dĺžky EB . Tým pádom vieme aj určiť koeficient podobnosti týchto dvoch trojuholníkov, a to je $\frac{4/3}{2} = \frac{2}{3}$. Na tento koeficient sme mohli prísť aj uvedením, že musí byť rovnaký s koeficientom podobnosti štvorcov $BCDE$ a $FGHI$, nakoľko bod F je takisto stredom strany DG , rovnako ako bod E na strane AB , a body I a G sa taktiež dotýkajú strán trojuholníka.

Pri koeficientoch podobnosti platí, že obsah podobných útvarov sa zväčšuje/zmenšuje s druhou mocninou koeficientu. Pre trojuholník si to vieme dokázať pomocou vzorca pre výpočet obsahu $S = a \cdot v_a$. Ak máme dva trojuholníky s koeficientom podobnosti k , potom musí byť strana a výška druhého trojuholníka rovná ka , resp. kv_a , a jeho obsah je $ka \cdot kv_a = k^2 av_a$, čo je práve k^2 krát obsah prvého trojuholníka. Tento vzťah platí aj vo všeobecnosti pre všetky útvary, a analogicky sa taktiež pri priestorových telesách objem škáluje s tretou mocninou koeficientu podobnosti. My vieme tento fakt využiť na výpočet obsahu DGJ , ktorý tým pádom tvorí $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ z obsahu ABJ .

Nakoniec si musíme dopočítať obsah trojuholníkov DAE a BGC . Vďaka rovnostrannosti DAE vieme, že musí mať polovicu z obsahu $BCDE$, a keďže CG je $\frac{1}{3}$ z EB , musí mať BGC obsah $\frac{1}{6}$ z $BCDE$.

Zostáva nám už len všetky tieto obsahy sčítať a vyjadriť si z nich obsah $BCDE$ relatívne k ABJ .

$$S_{\triangle ABJ} = S_{\triangle AED} + S_{\square BCDE} + S_{\triangle BGC} + S_{\triangle DGJ},$$

$$S_{\triangle ABJ} = \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{6}\right) S_{\square BCDE} + \frac{4}{9} S_{\triangle ABJ},$$

$$\frac{5}{9} S_{\triangle ABJ} = \frac{5}{3} S_{\square BCDE},$$

$$\frac{1}{3} S_{\triangle ABJ} = S_{\square BCDE}.$$

Štvorec $BCDE$ tvorí tretinu z obsahu trojuholníka ABJ .

1.4 Koniec Mrzutého Sváru ($\kappa \leq 5$)

Zadanie. Prečo dokázal byť Istanbul takým vojensky významným bodom? Bo spor.

Bospor a Dardanely sa striedali v ofarbovaní šachovnice veľkosti 7×3 . Bospor ofarboval políčka červenou a Dardanely modrou. Dokážte, že po ofarbení všetkých políčok vieme nájsť také 4 políčka rovnakej farby, ktoré tvoria obdĺžnik (teda ich stredy sú vrcholy pravouhlého rovnobežníka) so stranami rovnobežnými s mriežkou šachovnice.

Riešenie. opravujú **Kopy** (martin.kopcany@trojsten.sk) a **Lukáš** (lukas.gaborik@trojsten.sk)

Skúsme nájsť tabuľku 7×3 takú, že tam nebudú štyri políčka rovnakej farby, ktoré tvoria obdĺžnik.

Každé z troch políčok stĺpca môže byť ofarbené dvoma rôznymi farbami, a teda existuje $2^3 = 8$ možností, ako môžu byť ofarbené jednotlivé stĺpce. V každom takomto ofarbení sú aspoň dve políčka rovnakej farby. Ak by dva zo stĺpcov boli ofarbené rovnako, tak by sa z políčok farby, čo v týchto stĺpcoch prevažuje, dal vytvoriť obdĺžnik. Tým pádom náš hľadaný obdĺžnik musí mať všetky stĺpce rôzne.

Keďže stĺpcov je 7 a rôznych ofarbení stĺpca je 8, tak z 8 rôznych ofarbení stĺpcov využijeme práve 7, a teda existuje aspoň jeden stĺpec, pre ktorý platí, že sú všetky jeho políčka ofarbené rovnakou farbou. Označme túto farbu F .

Dokopy existujú 3 možné ofarbenia stĺpca, ktoré majú práve dve políčka ofarbené farbou F . Keďže využívame každé ofarbenie okrem jedného práve raz, tak pre aspoň dva zo zvyšných šiestich stĺpcov platí, že dve z ich políčok sú ofarbené farbou F . Keď teda zoberieme stĺpec, ktorý je celý ofarbený farbou F a jeden z týchto minimálne dvoch stĺpcov, tak políčka s farbou F určite budú tvoriť obdĺžnik.

Z toho vyplýva, že v tabuľke 7×3 bude musieť byť vždy aspoň jeden takýto obdĺžnik zo štvorčekov rovnakej farby. A to dokonca bez ohľadu na to, koľko je ktorej farby na plánu.

1.5 Kolobeh Mokrych Skúmaviek ($\kappa \leq 8$)

Zadanie. Prečo skúmavka rýchlo zabúda na svoje problémy s konzumáciou? Sa jej to všetko zleje.

Máme dve rozlíšiteľné skúmavky s objemom n a k , kde n a k sú celé kladné čísla. Obe skúmavky sú na začiatku prázdne a máme neobmedzené množstvo vody. V jednom kroku môžeme:

- vyprázdniť ľubovoľnú skúmavku,

- naplniť ľubovoľnú skúmavku doplna alebo
- preliať vodu z jednej skúmavky do druhej, pričom sa preleje vždy najviac, ako sa dá (limitovaní sme vodou v skúmavke, z ktorej lejeme, a kapacitou skúmavky, do ktorej lejeme).

V závislosti od n a k určte počet rôznych konfigurácií, ktoré je možné dosiahnuť. Dve konfigurácie sú rôzne, ak niektorá zo skúmaviek obsahuje v jednej konfigurácii iné množstvo vody ako v druhej.

Riešenie. opravujú **Baška** (barbora.javorova@trojsten.sk) a **Aňa** (anna.bogaevskaia@trojsten.sk)

Najprv sa skúsme pozrieť na prípad, kedy sú n a k nesúdeliteľné. Ak by sa nám podarilo ukázať, že najmenší kladný objem, ktorý vieme v jednej skúmavke dostať, je 1, tak by sme vedeli mať v každej skúmavke každý celočíselný objem.

Nech sme objem 1 v jednej zo skúmaviek dostali ľubovoľnou sekvenciou prelievania vody medzi skúmavkami. Aby sme v danej skúmavke dostali objem 2, stačí nám danú sekvenciu prelievania zopakovať dvakrát. Rovnako ak chceme v danej skúmavke dostať objem l , tak nám stačí danú sekvenciu prelievania zopakovať l -krát. Zhora sme limitovaní len objemom skúmavky, logicky väčší objem vody ako objem skúmavky v nej nemôžeme mať.

Čo pre nás, ale znamená „zopakovať sekvenciu prelievania l -krát“? Uvažujme, že v sekvencii prelievania nenaplníme neprázdnu skúmavku, nevyliavame neplnú skúmavku a jednu skúmavku len plníme a druhú len vyprázdňujeme (čo pre sekvenciu pre objem 1, ktorú vytvoríme, platí). Prelievanie medzi skúmavkami objem nemení, môžeme ho teda zanedbať. Spočítajme počet naplnení a vyliatí. Ak ho prenásobíme l -krát, zrejme tak dostaneme l -násobný objem, ktorý vieme preliať do ktorejkoľvek skúmavky.

Keďže obe skúmavky majú celočíselný objem, tak sa nám ich prelievaním nepodarí v žiadnej vyrobiť neceločíselný objem. Prelievanie vody je ekvivalentné so sčítavaním a odčítavaním celých čísel. Teda žiaden nenulový objem menší ako 1 v žiadnej skúmavke nevieme dostať. Už nám stačí ukázať, že vieme dostať objem 1.

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $n > k$. Teda si vieme n zapísať v tvare $n = qk + r$, kde q je podiel a $0 \leq r \leq k-1$ je zvyšok po celočíselnom delení n číslom k . Najskôr naplníme veľkú skúmavku. Ak by sme postupne prelievali vodu z veľkej skúmavky do malej, pričom keď malá skúmavka je plná, tak ju vyprázdňujeme, po q krokoch by sme vo veľkej skúmavke mali objem r . Ten by sme preliali do malej skúmavky a veľkú naplnili vodou doplna. Opäť by sme postupne prelievali vodu z veľkej skúmavky do malej a po q krokoch by sme vo veľkej skúmavke mali objem $2r$ (keďže sme do malej skúmavky preliali o r menej vody, keďže tú sme tam mali z pôvodného prelievania).

Takto by sme vedeli vo veľkej skúmavke postupne dostávať objemy tvaru mr . Vždy by sme sa však pozreli len ich zvyšok po delení k , teda ak by $mr > k$, tak by sme prebývajúcí objem vo veľkej skúmavke preliali do malej skúmavky. To by sme opakovali až pokým by vo veľkej skúmavke nezostal objem menší ako k . Dôležité je si uvedomiť, že sa nám stačí pozeráť len na hodnoty m , pre ktoré platí $1 \leq m \leq (k-1)$. Ak by $k \leq m$, tak by sme si mohli m zapísať v tvare $pk + o$, kde p , o sú celé čísla a $o \leq (k-1)$, teda by sme vo veľkej skúmavke mali objem tvaru $(pk + o)r = pkr + or$. Keďže sa pozeráme na zvyšky po delení k , tak $pkr + or$ dáva rovnaký zvyšok ako or .

Máme teda $k-1$ súčinov v tvare mr , kde $1 \leq m \leq (k-1)$. Zároveň máme $k-1$ rôznych zvyškov po delení k . Teda ak by nám žiadne dva zo súčinov nedávali rovnaký zvyšok, jeden zo súčinov by musel dávať zvyšok 1. Ako si však môžeme byť istí, že žiadne dva súčiny nedávajú rovnaký zvyšok? Predpokladajme, že také dva súčiny existujú. Nech sú to súčiny ir a jr . Aby dávali rovnaký zvyšok, tak musí platiť

$$k \mid (ir - jr),$$

$$k \mid r(i - j).$$

Keďže však k a r sú nesúdeliteľné, tak $k \mid (i - j)$. Teda i a j dávajú rovnaký zvyšok, čo v našom prípade znamená, že $i = j$. Teda taká dvojica súčinov neexistuje, takže dostávame postupne všetky zvyšky po delení k , teda aj 1.

Resp. ak dostávame všetky zvyšky po delení k , tak dostávame aj všetky celočíselné hodnoty v malej skúmavke. Rovnako to funguje aj vo veľkej skúmavke, keďže každý jej celočíselný objem sa dá vyjadriť v tvare $ak + b$, kde a a b sú celé čísla a b je zvyšok po delení k .

Keď vieme aké všetky objemy vody sa môžu nachádzať v jednotlivých skúmavkách, zostáva sa nám už len pozrieť na všetky konfigurácie, ktoré môžu nastať. Dôležité je si uvedomiť, že ak máme ľubovoľnú skúmavku v inom stave, než plnom či prázdnom, druhá skúmavka nemôže byť v inom stave ako v plnom alebo prázdnom. Inými slovami, nemôže sa mi stať, že by dve skúmavky boli v poloplnom stave. Teda pre každý z objemov x , kde $1 \leq x \leq n - 1$ v skúmavke s objemom n , nadobúda skúmavka s objemom k len dva stavy. To robí dohromady $2(n - 1)$ rôznych konfigurácií. Pre objemy 0, n v skúmavke s objemom n nadobúda skúmavka s objemom k objemy y , kde $0 \leq y \leq k$. To robí dohromady $2(k + 1)$ rôznych konfigurácií. V oboch skúmavkách vieme, teda vyrobiť $2(n - 1) + 2(k + 1) = 2(n + k)$ rôznych konfigurácií.

Ak by n a k boli súdeliteľné, tak existuje $\text{NSD}(n, k) > 1$, označme si ho d . Ak by sa nám podarilo ukázať, že konfigurácie skúmaviek s objemami n , k a $\frac{n}{d}$, $\frac{k}{d}$ sú rovnaké máme vyhrané. Skúmavky s objemami $\frac{n}{d}$ a $\frac{k}{d}$ majú na základe predošlého odstavca počet všetkých konfigurácií $2\left(\frac{n+k}{d}\right)$. Každú jednotku objemu daných skúmaviek môžeme rozdeliť na d rovnakých častí a daný dielik prehlásiť za novú jednotu objemu. Potom sme, ale v situácii, že máme skúmavky s objemami n a k . Teda aj skúmavky s objemami n a k majú práve $2\left(\frac{n+k}{d}\right)$, keďže sa jedná o tie isté skúmavky a počet konfigurácií sa teda nemohol zmeniť.

Iné riešenie.

Na riešenie tejto úlohy vieme použiť aj vedomosť Bézoutovej rovnosti, ktorá hovorí, že pre každé dve čísla x, y existujú také koeficienty $a, b \in \mathbb{Z}$, že $ax + by = \text{NSD}(x, y)$. A zároveň $\text{NSD}(x, y)$ je najmenšie kladné číslo, ktoré vieme napísať v takomto tvare. Ak by sa nám podarilo použiť Bézoutovu rovnosť na opísanie správania skúmaviek, mali by sme vyhrané.

Keďže $\text{NSD}(x, y)$ je najvyššie rovné menšiemu z dvojice x, y , tak s istotou vieme, že práve jeden z koeficientov a, b je kladný. Nech bez ujmy na všeobecnosti to bude a , teda b je záporné. Kladný koeficient a bude predstavovať počet naplnených skúmaviek a záporný koeficient b počet vyprázdnených skúmaviek. Inak povedané skúmavku s objemom x naplníme vodou a následne prelejeme do skúmavky s objemom y . Ak je skúmavka s objemom y plná, celý jej objem vody vylejeme. Na konci celého cyklu sme skúmavku s objemom x naplnili práve a -krát a skúmavku s objemom y vyprázdnil práve b -krát. Na základe Bézoutovej rovnosti vieme, že nám v jednej skúmavke vznikol objem vody rovný $\text{NSD}(x, y)$ a že žiaden menší objem nevieme prelievaním vody v skúmavkách vyrobiť. Zároveň vieme vyrobiť v každej skúmavke ľubovoľný násobok $\text{NSD}(x, y)$. Môžeme to vidieť priamo z rovnosti $ax + by = \text{NSD}(x, y)$, keďže nám stačí len celú rovnicu vynásobiť prislúchajúcim násobkom.

Teraz nám, už len treba premenovať si naše konštanty, teda nech $\{x, y\} = \{n, k\}$. Potom vieme v skúmvke s objemom n dosahovať všetky objemy tvaru id , kde $d = \text{NSD}(n, k)$ a $0 \leq i \leq \frac{n}{d}$, analogicky pre skúmvku s objemom k .

Keď vieme, aké všetky objemy vody sa môžu nachádzať v jednotlivých skúmvkách, zostáva sa nám už len pozrieť na všetky konfigurácie, ktoré môžu nastať. Dôležité je si uvedomiť, že ak mám ľubovoľnú skúmvku v inom stave, než plnom či prázdnom, druhá skúmvka nemôže byť v inom stave ako v plnom alebo prázdnom. Inými slovami, nemôže sa mi stať, že by dve skúmvky boli v poloplnom stave. Teda pre každý z objemov id , kde $1 \leq i \leq \frac{n}{d} - 1$ v skúmvke s objemom n , nadobúda skúmvka s objemom k len dva stavy. Čo robí dohromady $2(\frac{n}{d} - 1)$ rôznych konfigurácií. Pre objemy $0, n$ v skúmvke s objemom n , nadobúda skúmvka s objemom k objemy id , kde $0 \leq i \leq \frac{n}{d}$. Čo robí dohromady $2(\frac{k}{d} + 1)$ rôznych konfigurácií. V obidvoch skúmvkách vieme teda vyrobiť $2(\frac{n}{d} - 1) + 2(\frac{k}{d} + 1) = 2(\frac{n+k}{d})$ rôznych konfigurácií.

1.6 Klub Morských Sépií

Zadanie. *Klep, klep, kdo tam a co se tam dělá? Tady sé pije.*

V zálive v Karibskom mori stredozemskom žije n sépií, kde $n \geq 4$. Každá sépia má medzi zvyšnými nejaké kamarátky, pričom kamarátstva sú vzájomné. Občas sépie chytí nutkanie pochytať sa za ramená do kruhu. Každá sépia má dve ramená, každým môže chytiť nejakú inú sépiu za jej rameno. Žiadne dve sépie sa nechcú držať, pokiaľ nie sú kamarátky.

Vieme, že v zálive pre každé celé m také, že $2 < m < n$, sa ku každým m sépiám, ktoré sa dokážu pochytať za ramená do kruhu, vie pridať nejaká zo zvyšných sépií tak, aby sa vzniknutá $(m + 1)$ -tica opäť vedela pochytať za ramená do kruhu. To však nemusí znamenať, že nová sépia sa vie do kruhu priamo pridať, je možné, že sa ostatné sépie budú musieť nejakým spôsobom preusporiadať.

Jedného dňa sépia Septima (jedna spomedzi našich n sépií) prišla do zálivu, kde našla niekoľko sépií (aspoň tri, ale nevieme presne koľko), ako sa držia za ramená do kruhu (bez nej).

Dokážte, že pre každé m , kde $2 < m < n$, existuje m -tica sépií, ktoré sa dokážu držať do kruhu za ramená.

Riešenie. opravujú **Viktor** (viktor.balan@trojsten.sk) a **Mišo M.** (michal.molnar@trojsten.sk)

Označme počet sépií, o ktorých vieme, že vedľa utvoriť kruh x , pričom vieme iba, že $2 < x < n$. Našou úlohou je ukázať, že určite existujú aj zo sépií zostrojiteľné kruhy veľkostí 3 až n . Ukážme najprv, že určite bude existovať kruh najmenšej veľkosti, teda 3.

Predstavme si y sépií v kruhu veľkosti väčšej ako 4 a menšej ako n . Ukážeme, že tento kruh vieme vždy zmenšiť (to, že môžeme zmenšiť aj kruh veľkosti 4 ukážeme potom trochu iným spôsobom). Určite existuje nejaká sépia, ktorá sa k nim vie pridať – teda je kamarátkou s aspoň dvomi z nich (inak by sa s ňou kruh vytvoriť nijako nedal). Vezmime teda nejaké dve jej kamarátky v kruhu. Ak sú na susedných miestach, tak spolu s ňou vedľa vytvoriť kruh veľkosti 3. Inak delia zvyšok kruhu na dve časti (tieto dve sépie do zvyšku kruhu nerátame), z ktorých menšia musí mať veľkosť najviac $y - 4$ – ak by to tak nebolo, obe časti by museli byť väčšie, čo sa sčíta na aspoň $2y - 6 + 2 = 2y - 4$ sépií celkovo, čo je určite viac ako $y > 4$. Vezmime túto časť vrátane dvoch deliacich sépií, a kruh uzatvorme sépiou navyše, ktorá je kamarátkou ich oboch. Dostaneme kruh veľkosti najviac $y - 1$, teda sa nám kruh podarilo zmenšiť.

Dokážme už len, že vieme zmenšiť aj kruh veľkosti 4. Vieme, že určite existuje nová sépia, ktorá vie s týmito štyrmi sépiami utvoriť kruh veľkosti 5. Opäť platí, že bude mať medzi nimi aspoň dve kamarátky. Ak sú susedné, tvoria

obe tieto kamarátky spolu s novou sépiou navzájom kruh veľkosti 3. Potrebujeme sa teda pozrieť na prípad, keď nie sú susedné. Nazvime tieto dve kamarátky A a B . V kruhu veľkosti 4 musia byť nesusedné sépie oproti sebe, teda takto bude vyzerat' cyklus: $\dots A, X, B, Y \dots$ v poradí po obvode. Okrem toho vieme, že existuje nejaké poradie, v akom sú tieto sépie usporiadateľné do kruhu veľkosti 5, spolu s novou sépiou. Tri susedné miesta v tomto kruhu obsadí nová sépia s kamarátkami A a B , takže sépie X a Y budú musieť byť na zvyšných dvoch miestach. Teda sépie X a Y musia byť kamarátky. To znamená, že sépie X , Y a A tvoria kruh veľkosti 3. Čo bolo treba dokázať.

Vidíme, že určite vieme nájsť tri sépie tvoriace najmenší možný kruh. Ostáva nám len ukázať, že sa dajú vystavať aj všetky väčšie kruhy. To je pomerne triviálne – zo zadania priamo vyplýva, že ľubovoľný kruh nezahŕňujúci všetky sépie vieme zmeniť na kruh veľkosti o 1 väčšej, teda vieme skonštruovať všetky vyššie veľkosti.

1.7 Kvartický Mnohočlen Schovaný

Zadanie. Prečo sa polynóm rád vracia k osi x ? Lebo tam má svoje korene.

Majme polynóm $P(x)$ štvrtého stupňa s reálnymi koeficientami taký, že pre všetky reálne čísla x platí $P(x) \geq x$ a navyše $P(1) = 1$, $P(2) = 4$ a $P(3) = 3$. Nájdite všetky také polynómy $P(x)$.

Riešenie. opravujú **Mati** (matus.zelko@trojsten.sk) a **Štepi** (martin.stepanek@trojsten.sk)

Ako nám napovedá aj vtip v zadaní, s polynómami vieme pekne pracovať, keď poznáme ich korene, teda hodnoty, kde $P(x) = 0$. Zadanie nám o koreňoch polynómu nič nehovorí, ale môže sa nám zdať podozrivé, že $P(1) = 1$, $P(3) = 3$ a $P(x) \geq x$. Môžeme si teda definovať druhý polynóm $Q(x) = P(x) - x$. Potom zo vzťahov, ktoré sme práve spomínali, dostaneme, že $Q(x) \geq 0$ pre všetky x a zároveň 1 a 3 sú korene. Polynóm Q bude tiež štvrtého stupňa, rovnako ako P .

Keď má polynóm nejaký koreň r , tak ten polynóm vieme vydeliť $(x - r)$. $Q(x)$ teda vieme napísať ako $(x - 1)(x - 3)R(x)$, kde $R(x)$ je polynóm druhého stupňa (keďže $Q(x)$ má byť štvrtého). Musí platiť, že $(x - 1)(x - 3)R(x) \geq 0$. Z tejto nerovnosti vieme vyjadriť $R(x)$ a rozdeliť si to na niekoľko prípadov.

Ak je $x < 1$, potom sú $(x - 1)$ aj $(x - 3)$ záporné, ich súčin je kladný, takže musí byť $R(x) \geq 0$, aby bolo aj $Q(x) \geq 0$. Podobne, ak je $1 < x < 3$, musí byť $R(x) \leq 0$ a pre $x > 3$ musí byť znovu $R(x) \geq 0$.

Keďže polynómy sú spojité, musí platiť $R(1) = R(3) = 0$.¹ 1 a 3 sú teda korene aj polynómu $R(x)$. Keďže $R(x)$ je druhého stupňa, vieme ho napísať ako $(x - 1)(x - 3)c$, kde c je nejaká (nezáporná) konštanta.

Z toho vieme vyjadriť aj pôvodný polynóm $P(x) = (x - 1)^2(x - 3)^2c + x$. Zostáva ešte zistiť, čo môže byť c . Na to využijeme poslednú informáciu v zadaní, ktorú sme ešte nevyužili, a to že $P(2) = 4$. Dostávame

$$(2 - 1)^2(2 - 3)^2c + 2 = 4,$$

$$1 \cdot 1 \cdot c + 2 = 4,$$

$$c = 2.$$

Dostávame, že $P(x) = 2(x - 1)^2(x - 3)^2$, čo aj naozaj vyhovuje zadaniu.

¹ Ak by bolo napríklad $R(1) < 0$, potom by pre x tesne menšie ako 1 musela hodnota polynómu náhle „skočiť“ na nulu alebo viac, čo sa nemôže stať.

Iné riešenie

Rovnako ako v predošlom riešení si definujeme $Q(x) = P(x) - x$. Vieme, že $Q(x)$ má korene 1 a 3 a je všade ≥ 0 . V koreňoch sa teda jeho graf dotýka x -ovej osi. Je známe, že ak sa polynóm v koreni r dotýka x -ovej osi, tak je to viacnásobný koreň, teda polynóm môžeme vydeliť $(x - r)^2$. Takto rovno dostaneme $Q(x) = (x - 1)^2(x - 3)^2c$, keďže súčin vybratých zátvoriek je už štvrtého stupňa. Hodnotu c dopočítame rovnako ako v predchádzajúcom riešení.

1.8 Kolmíc Miesto Stretu

Zadanie. Prečo sa chce kružnica vpísaná hrať s trojuholníkom? Lebo je do neho.

V trojuholníku ABC označme D priesečník osi uhla BAC a strany BC . Os úsečky AD pretína osi uhlov CBA a ACB postupne v bodoch K a L . Dokážte, že stred vpísanej kružnice trojuholníka ABC je priesečníkom výšok trojuholníka KLD .

Riešenie. opravujú **Timka** (timea.jakubocyova@trojsten.sk) a **Jirka** (jirka.szotkowski@trojsten.sk)

Vzorové riešenie tejto úlohy si môžeš pozrieť aj ako [video](https://www.youtube.com/KorMatSem) na našom YouTube kanáli www.youtube.com/KorMatSem.

Jeden z kľúčových krokov k vyriešeniu úlohy bolo poradiť si s bodmi K a L . V tom nám mohlo pomôcť známe tvrdenie, že v trojuholníku sa os strany a os uhla pri vrchole oproti tejto strane pretínajú na kružnici opísanej tomuto trojuholníku v tzv. *Švrčkovom bode*. Z toho vyplýva, že K leží na kružnici opísanej trojuholníku ABD a L zas na kružnici opísanej trojuholníku ACD .

Označme si I stred vpísanej kružnice trojuholníka ABC , ktorý, ako je známe, je priesečníkom osí vnútorných uhlov trojuholníka. Všimnime si, že priamka DI je kolmá na KL zo zadania, keďže priamka KL je os úsečky AD . Následne nám stačí ukázať, že priamka LI je kolmá na DK , pretože priamky LI a DI budú potom výšky v trojuholníku KLD postupne z vrcholov L a D , pričom I bude ich priesečník, čo je presne to, čo chceme dokázať.

Tak poďme dokázať, že LI je kolmá na DK , čo vieme dosiahnuť prenesením zopár uhlov. Konkrétne dokážeme, že uhol v bode M , ktorý si zdefinujeme ako priesečník priamok LC a KD , je pravý. Uhly v trojuholníku si označíme klasicky α, β, γ . Najprv využijeme už spomenutý fakt, že $KABD$ je tetivový štvoruholník, teda platí, že $|\sphericalangle AKD| = 180^\circ - \beta$. Analogicky aj $|\sphericalangle ALD| = 180^\circ - \gamma$. Ďalej si všimnime, že trojuholníky KLD a KLA sú osovo súmerné podľa priamky KL . Teda priamka KL je aj osou uhlov AKD a ALD . Teraz môžeme smelo určiť hodnotu

$$|\sphericalangle KAL| = 180^\circ - |\sphericalangle ALK| - |\sphericalangle AKL| = 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot (|\sphericalangle AKD| + |\sphericalangle ALD|) = \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

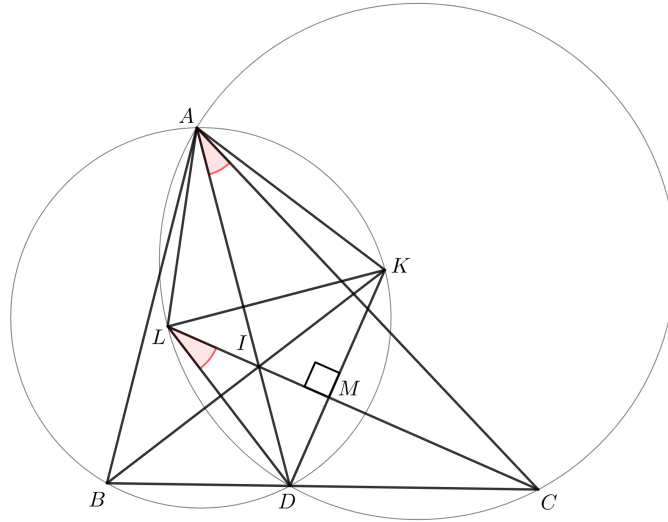
Z osovej súmernosti vieme aj, že $|\sphericalangle KAL| = |\sphericalangle KDL|$. Ďalej z obvodových uhlov si všimnime, že

$$|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DLC| = \frac{\alpha}{2}.$$

Nič nám teraz nebráni vyrátať

$$|\sphericalangle LMD| = 180^\circ - |\sphericalangle DLM| - |\sphericalangle LDM| = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = 90^\circ,$$

čiže priamka LI je kolmá na DK , čo je ako už bolo vyššie popísané všetko potrebné na vyriešenie tejto úlohy.



1.9 Kardinalita Množiny Štvorcová

Zadanie. Aké formácie tvoria muchy prenášajúce spavú chorobu? Štvor-tse.

Nech n je kladné celé číslo. Uvažujme počet usporiadaných dvojíc kladných celých čísel (a, b) takých, že číslo

$$\frac{ab}{a+b}$$

je celé a delí n . Ukážte, že pre všetky n je tento počet druhou mocninou celého čísla.

Riešenie. opravujú Michal S. (michal.stanik@trojsten.sk) a Fero (frantisek.gardian@trojsten.sk)

Nech a a b sú vyhovujúce súdeliteľné čísla s najväčším spoločným deliteľom l , potom² $a = lp$, $b = lq$, $(p, q) = 1$.

$$\frac{ab}{a+b} = \frac{l^2 pq}{l(p+q)} = \frac{lpq}{p+q}.$$

Platí, že $(pq, p+q) = 1$, pretože p a q sú nesúdeliteľné s $p+q$. Ak by totiž nejaké číslo d delilo p a $p+q$, tak by potom delilo aj ich rozdiel, čo znamená, že $d \mid q$, $d \mid p$, ale p a q sú nesúdeliteľné. Rovnakým spôsobom by sme to ukázali pre q .

Takže $p+q$ musí deliť samotné l z čitateľa, to znamená, že $l = k(p+q)$. Dostávame

$$\frac{lpq}{(p+q)} = \frac{k(p+q)pq}{(p+q)} = kpq,$$

pričom $k, p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$. Pritom k môže byť súdeliteľné s p alebo q .

Keďže $\frac{ab}{a+b} \mid n$, potom aj $kpq \mid n$, čiže k, p, q sú delitele n . Ďalej budeme počítať počet vyhovujúcich trojíc (k, p, q) , kde $kpq \mid n$ a čísla p a q sú nesúdeliteľné. Môžeme si všimnúť, že tento počet bude rovnaký ako hľadaný počet

² (p, q) značí najväčšieho spoločného deliteľa p a q .

vhodných dvojíc (a, b) , pretože každá trojica (k, p, q) nám jednoznačne dáva dvojicu (a, b) podľa vzťahov $l = k(p + q)$, $a = lp$, $b = lq$ a táto skutočne vyhovuje podmienke zadania, pretože $\frac{ab}{a+b} = kpq \mid n$.

Rôzne trojice (k, p, q) nám dajú rôzne dvojice (a, b) , pretože z dvojice (a, b) vieme jednoznačne určiť l, p, q a z toho jednoznačne dopočítať k .

Najprv sa pozrieme na prípady, keď n je rovné 1, prvočíslu a mocnine prvočísla. Pre 1 vidíme, že je len jedna možnosť $k = p = q = 1$. Pre každé prvočíslo sú 4 možnosti, buď sa všetky tri čísla rovnajú 1 alebo jedno z nich je dané prvočíslo. 1 a 4 sú druhé mocniny, čiže v týchto prípadoch to platí.

V prípade, že $n = P^m$ pre nejaké prvočíslo P , dostaneme dva podprípady:

1. $p = q = 1$: v tomto prípade dostávame $m + 1$ možnosti, lebo k sa môže rovnať $1, P^1, P^2, \dots, P^m$.
2. $p = P^s$, alebo $q = P^s$, kde $s \in \{1, \dots, m\}$: keďže p a q sú nesúdeliteľné, to druhé z nich musí byť 1. Pre pevne zvolené s potom máme $(m + 1 - s)$ možností pre k (k môže nadobúdať hodnoty od P^0 po P^{m-s}). Keďže si navyše vyberáme, či p bude P^s a q bude 1 alebo naopak, máme dokopy $2(m + 1 - s)$ možností. Celkový počet možností cez všetky s je teda $2(1 + 2 + 3 + \dots + m)$. Tento súčet je rovný $2 \frac{m(m+1)}{2} = m(m + 1)$.

Takže dokopy dostaneme $(m + 1) + m(m + 1) = (m + 1)(m + 1) = (m + 1)^2$.

Posledný prípad je, keď n má dvoch alebo viac prvočíselných deliteľov, teda $n = P_1^{m_1} \dots P_t^{m_t}$. V tomto prípade možnosti, ako rozdeliť jednotlivé mocniny prvočíselných deliteľov medzi k, p a q sú navzájom od seba nezávislé, čo znamená, že celkový počet možností bude súčin počtov možností pre jednotlivé mocniny prvočísel. Každé $P_i^{m_i}$ bude mať $(m_i + 1)^2$ možností a súčin druhých mocnín je druhá mocnina.

Takže pre všetky n je tento počet druhou mocninou vyjadrenou ako $((m_1 + 1)(m_2 + 1)(m_3 + 1) \dots (m_t + 1))^2$, kde m_i sú exponenty jednotlivých prvočíselných deliteľov čísla n . Môžeme si všimnúť, že ide dokonca o druhú mocninu počtu deliteľov n .

1.10 Kraje Malej Sféry

Zadanie. Na ktorú rieku si spomenieš po prečítaní takto vyzerajúceho zadania?

„Nech a, b a c sú nezáporné reálne čísla také, že $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Dokážte, že

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a}{1+a^4} + \frac{b}{1+b^4} + \frac{c}{1+c^4} \leq \frac{9\sqrt{3}}{10},$$

a určte, kedy v nerovnostiach nastáva rovnosť.“

Uh.

Riešenie. opravujú **Džavo** (adam.dzavoronok@trojsten.sk) a **Kubko** (jakub.poljovka@trojsten.sk)

V nerovnostiach sa často oplatí najprv odskúšať na začiatok nejaké konkrétne špeciálne hodnoty, aby sme dostali intuíciu, kedy nastávajú extrémny a ako sa výraz v nerovnosti správa. Následne nám to môže dať nadhľad, čo sa týka odhadov a zbraní, ktoré môžeme použiť na jej dokázanie. Dobrým príkladom takých špeciálnych hodnôt sú prípady, keď všetky 3 premenné sú rovnaké alebo zas keď 1 je „veľká“ a zvyšné sú „malé“. Rovnako je to aj

v prípade tejto nerovnosti. Pre $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ dostávame hodnotu výrazu

$$\frac{a}{1+a^4} + \frac{b}{1+b^4} + \frac{c}{1+c^4} = \frac{3a}{1+a^4} = \frac{9\sqrt{3}}{10}.$$

Na druhej strane, v prípade keď $a = b = 0$ a $c = 1$, dostávame hodnotu výrazu

$$\frac{a}{1+a^4} + \frac{b}{1+b^4} + \frac{c}{1+c^4} = 2 \cdot \frac{0}{1+0^4} + \frac{1}{1+1^4} = \frac{1}{2}.$$

Keď sme sa už zorientovali, tak poďme dokázať hornú hranicu.

Horná hranica

Najprv si spomeňme, pri akých známych nerovnostiach, ktoré platia na nezáporných číslach, dostávame rovnosť práve vtedy, keď jej aktéri sa rovnajú. Príkladom sú priemerové KAGH nerovnosti alebo aj mocninové priemery³. Keďže so zlomkami sa neprijemne pracuje, tak môžeme spraviť rafinovaný odhad, aby sme sa ich zbavili. Na to použijeme AG nerovnosť

$$a^4 + 1 = a^4 + 9 \cdot \frac{1}{9} \geq 10 \sqrt[10]{a^4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^9},$$

kde rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a^4 = \frac{1}{9}$, teda keď $a = \frac{1}{\sqrt[4]{9}}$, čo je presne vtedy, kedy sa nám podarila dosiahnuť horná hranica. Z toho máme, že

$$\frac{a}{1+a^4} \leq \frac{a}{10 \sqrt[10]{a^4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^9}} = \frac{9^{\frac{9}{10}} a^{\frac{3}{5}}}{10},$$

čiže analogickými odhadmi dostávame silnejšiu nerovnosť

$$\frac{a}{1+a^4} + \frac{b}{1+b^4} + \frac{c}{1+c^4} \leq \frac{9^{\frac{9}{10}}}{10} \left(a^{\frac{3}{5}} + b^{\frac{3}{5}} + c^{\frac{3}{5}} \right) \leq \frac{9\sqrt{3}}{10},$$

ktorú ideme teraz dokázať. Využijeme teraz mocninové priemery pre exponenty $\frac{3}{5}$ a 2 ktoré nám hovoria, že

$$\left(\frac{a^{\frac{3}{5}} + b^{\frac{3}{5}} + c^{\frac{3}{5}}}{3} \right)^{\frac{5}{3}} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}},$$

čo nám po zopár triviálnych úpravách a dosadeniach (ktoré prenechávame na čitateľa) dá sľúbenú hornú hranicu. Pritom sa môžeme zamyslieť, že z použitých odhadov naozaj vyplýva, že rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Dolná hranica

Pozrime sa na dolnú hranicu. Tú sme dostali, keď jedno z čísel bolo 1 a zvyšné boli 0. Jeden odhad, ktorý nadobúda rovnosť pre práve 1 a 0 je napríklad taký, že ak máme reálne čísla p, q také, že $p \geq q$ tak $x^q \geq x^p$ pre reálne číslo x z uzavretého intervalu 0 až 1, z ktorého sú aj naše a, b, c , čo vyplýva zo zadanej podmienky. Tu konkrétne využijeme, že $a \geq a^2$. Teraz odhadneme menovatele, keďže $a \leq 1$ tak následne aj $a^4 \leq 1$, čiže $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+a^4}$. Analogické

³<https://prase.cz/library/NerovnostiLD/NerovnostiLD.pdf>

odhady platia aj pre b aj c . Keď ich všetky dáme dokopy, tak máme

$$\frac{a}{1+a^4} + \frac{b}{1+b^4} + \frac{c}{1+c^4} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2} = \frac{1}{2},$$

kde rovnosť nastáva práve vtedy, keď jedno z čísel je 1 a zvyšné sú 0, čo je práve vtedy, keď nastáva rovnosť aj v hore použitých odhadoch.